
Vollständige Synchronisation chaotischer Oszillatoren mit zeitverzögerter Kopplung

Complete synchronisation of chaotic oscillators with time-delayed coupling

Zur Erlangung des Grades eines Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

genehmigte Dissertation von Dipl.-Phys. Thomas Jüngling aus Gießen

Dezember 2010 — Darmstadt — D 17



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Physik
Institut für Festkörperphysik
AG nichtlineare Spinwellendynamik

Vollständige Synchronisation chaotischer Oszillatoren mit zeitverzögerter Kopplung
Complete synchronisation of chaotic oscillators with time-delayed coupling

Genehmigte Dissertation von Dipl.-Phys. Thomas Jüngling aus Gießen

1. Gutachten: Prof. Dr. H. Benner
2. Gutachten: Prof. Dr. B. Drossel

Tag der Einreichung: 20.10.2010

Tag der Prüfung: 13.12.2010

Darmstadt — D 17

Bitte zitieren Sie dieses Dokument als:

URN: urn:nbn:de:tuda-tuprints-23740

URL: <http://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de/2374>

Dieses Dokument wird bereitgestellt von tuprints,

E-Publishing-Service der TU Darmstadt

<http://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de>

tuprints@ulb.tu-darmstadt.de



Die Veröffentlichung steht unter folgender Creative Commons Lizenz:

Namensnennung – Keine kommerzielle Nutzung – Keine Bearbeitung 2.0 Deutschland

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/de/>

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Kopplungsschemata	5
1.1 Schemata für vollständige Synchronisation	5
1.1.1 Unidirektionale Wechselwirkung	7
1.2 Schemata mit Zeitverzögerungen	8
1.2.1 Unidirektionale Schemata	10
1.3 Sonstige Schemata	12
2 Experimentelles System	13
2.1 Konstruktion des autonomen Diodenoszillators	13
2.2 Eigenschaften des Schwingkreises	15
2.3 Numerische Modellierung	18
2.4 Zwei identische Schwingkreise	22
2.5 Digitale Verzögerungsleitungen	22
3 Invasive Kopplung	25
3.1 Eigenschaften invasiver zeitverzögerter Kopplung	25
3.2 Dynamik und Stabilität für kleine τ	27
3.3 Stabilität des Fixpunktes $\mathbf{x}_* = \mathbf{0}$	28
3.4 Stabilität synchroner periodischer Orbits	30
3.5 Stabilität vollständiger aperiodischer Synchronisation	32
3.5.1 Freie Exponenten	34
3.5.2 Globale Analyse	39
3.5.3 Separate nicht-invasive Kopplung	41
3.5.4 Zusätzliche Selbstrückkopplung	44
4 Nichtinvasive Kopplung	47
4.1 Stabilitätsanalyse	47
4.2 Der Fall $\tau = 0$	49
4.2.1 Näherung unveränderter Lyapunov-Vektoren	50
4.2.2 Grenzwert $k \rightarrow \infty$	51
4.2.3 Stabilisierung durch die dritte Komponente	52
4.3 Approximation für kleine k	54
4.4 Stochastische Modellierung	54
4.4.1 Diskrete Abbildungen	56
4.4.2 Lyapunov-Vektoren des Diodenoszillators	57
4.4.3 Stochastisches Modell	57
4.5 Vorhersage der Synchronisationseigenschaften	65
5 Erweiterte Kopplungstechniken	69
5.1 Gepulste Kopplung	69
5.1.1 Vergleich zu konstanter Kopplung	70

5.2	Verzögerungskompensation	73
5.3	Verzögerte und antizipierende Synchronisation	74
Zusammenfassung		77
Anhang		79
A	Experiment und Numerik	79
A.1	Nichtlinearität des Schwingkreises	79
A.1.1	Nichtlinearität und Dissipation	82
A.2	C-Matrizen periodischer Orbits	83
B	Analytik	85
B.1	Nicht-identische Systeme	85
B.2	Grenzen der Stabilität	86
B.3	Erweiterung des stochastischen Modells	87
B.3.1	Dynamik der Umschaltvorgänge	87
B.3.2	Phasenverschiebungen	87
Literaturverzeichnis		89

Abstract

I have studied two identical low dimensional chaotic oscillators, which are mutually coupled via time delayed components. I investigate experimentally as well as numerically and analytically the effects of complete mutual synchronisation and auto-synchronisation occurring in such a configuration. For my experiment I choose electronic autonomous diode oscillators with a main frequency in the kHz regime. Each of them can be modelled with very high accuracy by a three-dimensional ordinary differential equation. Thus, the aim of my work is to extract generic features for the given setup in order to derive an explanation for the observed synchronisation patterns. At first, I show general coupling schemes for which complete synchronisation exists. I distinguish between invasive and non-invasive components of the coupling. The parameters of the non-invasive coupling can be varied in order to study the mechanisms of stabilisation, which for the given setup is a non-trivial problem. My analytical investigation then refers to a stability analysis following time-delayed feedback control of periodic orbits. I show that this concept can also be applied to chaotic synchronisation. Further I derive a stochastic model that relies on the time evolution of Lyapunov-vectors. The model explains the detailed mechanism of stabilisation and gives an approximation of the characteristic exponents. In the last part I investigate a technique using pulsed coupling to improve the performance of anticipating synchronisation.



Einleitung

Die Physik komplexer Systeme ist zur Zeit ein sehr aktives Forschungsgebiet. Es gibt zwar keine allgemein anerkannte Definition für die Komplexität eines physikalischen Systems. Man stimmt aber in der Regel in dem Punkt überein, dass sich ein komplexes System durch nichtlineare Bewegungsgleichungen und eine große Anzahl an Freiheitsgraden auszeichnet. Der Zugang zu solchen Systemen besteht häufig in der Zerlegung in viele wechselwirkende Untereinheiten. Beispiele dafür sind Netzwerke und das klassische Vielteilchenproblem. Dabei zeigt das Gesamtsystem häufig emergente Eigenschaften, die die Teilsysteme alleine nicht besitzen können. Die zentralen Fragestellungen sind daher, wie diese Eigenschaften aus den Wechselwirkungen der Untereinheiten entstehen, und welche die wesentlichen Kenngrößen des Systems sind. Die Emergenz makroskopischer Aggregatzustände aus der Dynamik auf molekularer Ebene ist in dem Zusammenhang ein Musterbeispiel. Viele Konzepte der statistischen Physik, der Festkörperphysik und auch der physikalischen Chemie lassen sich ebenso in diesen formalen Rahmen einordnen. Eine besondere Schwierigkeit moderner Fragestellungen liegt dabei im Bereich ‘mittlerer’ Komplexität, wenn die Anzahl an Teilsystemen nicht groß genug ist für eine vereinfachende Grenzwertbetrachtung.

Die Beschreibung allgemeiner komplexer Systeme durch Netzwerke ist ein moderner und häufig verwendeter Ansatz [1]. Dafür muss die Struktur eines Netzwerks nicht offenkundig gegeben sein [2]. Ein besonderes dynamisches Phänomen in einem Netzwerk ist die Synchronisation der Teilsysteme. Darunter versteht man mittlerweile eine große Vielfalt von Abhängigkeiten der Elemente untereinander. Diese reichen von schwachen Korrelationen über Strukturbildung bis zur vollständigen Synchronisation des gesamten Netzes [3–6]. Einen Überblick über die unterschiedlichen Formen der Synchronisation findet man in der Monografie von Pikovsky [7]. Unter den zahlreichen Effekten zeichnet sich die Synchronisation chaotischer Systeme besonders aus.

Aufgrund der intrinsischen Instabilität eines chaotischen Systems widerstrebt synchrones Chaos zunächst jeder Erwartung. Es wurde aber bereits in den 1980er Jahren von Fujisaka gezeigt, dass infolge einer speziellen Wechselwirkung zwei Oszillatoren einer gemeinsamen chaotischen Trajektorie folgen können [8]. Unabhängig davon wurde der Effekt später von Afraimovich und Pecora entdeckt [9, 10]. Der Wissensstand von 2002 über chaotische Synchronisation wurde von Boccaletti in einer Übersichtsarbeit zusammengefasst [11]. Vollständige chaotische Synchronisation ist die am schwierigsten zu erreichende Form von Synchronisation. Der übliche Weg von ungekoppelten bis zu vollständig synchronisierten Systemen geht dabei in der Regel über die schwächere Form der Phasensynchronisation [12–14] und andere Formen der Synchronisation [15–19], die weniger als die vollständige Synchronisation von Symmetrien und speziellen Konfigurationen des Netzwerks abhängen. Der Übergang zu vollständiger chaotischer Synchronisation ist vergleichbar mit einem thermodynamischen Phasenübergang und ist geprägt von intermittenten Störungen des synchronen Zustandes [20–23]. Der Mechanismus vollständiger chaotischer Synchronisation ist analog zu dem der Kontrolle chaotischer Dynamik. Mithilfe eines geeigneten externen Signals lässt sich die Sensitivität einer chaotischen Trajektorie nutzen, um diese gezielt zu führen [24–27]. Es gibt unterschiedliche Methoden, eine solche Stabilisierung mithilfe eines geeigneten Kontrolleingriffs zu erreichen. Dabei wird z.B. Information in Form symbolischer Dynamik auf das System übertragen [28–30], was auch für den Fall vollständiger Synchronisation demonstriert wurde [31].

In realen Netzwerken kann die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit von Signalen eine Rolle spielen. Entscheidend dafür sind die charakteristischen Zeitskalen der Teilsysteme. Die so entstehenden Zeitverzögerungen sind eine weitere Quelle komplexer Dynamik, die aufgrund der Verzögerung in einem unendlich-dimensionalen Raum stattfindet. Dieses Kontinuum ist vergleichbar mit den raumzeitlichen Prozessen bei der Signalausbreitung im Netz. Daher kann bereits ein einzelnes, niedrigdimensionales System bei einer zeitverzögerten Selbstrückkopplung ein sehr reichhaltiges dynamisches Verhalten

zeigen. Ein besonderes Phänomen ist die als zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle bekannte Autosynchronisation, bei der instabile periodische Orbits stabilisiert werden können. Es gibt eine große Vielfalt unterschiedlicher Arbeiten zu diesem Effekt, der zuerst von Pyragas entdeckt wurde [24]. Just zeigte analytisch den Mechanismus der Stabilisierung, der auf einer endlichen Torsion des Orbits beruht [32]. Daraus folgt eine spezielle Einschränkung für die Kontrollierbarkeit instabiler periodischer Orbits, die in der heute bekannten Form von Nakajima formuliert wurde [33]. Diese Einschränkung bot Anreiz für zahlreiche Untersuchungen, die darauf zielten, mit erweiterten Methoden dennoch eine funktionierende Kontrolle zu erreichen. Die systemspezifische Einschränkung konnte sowohl mit speziellen Rückkopplungen [34–36] als auch durch Hinzufügen eines zusätzlichen instabilen Freiheitsgrades umgangen werden [37, 38]. Orbits mit einer zu großen Instabilität, die ansonsten für die herkömmliche Kontrolle zugänglich sind, konnten mithilfe mehrfacher zeitverzögerter Rückkopplung stabilisiert werden [39, 40]. Speziellere Arbeiten zu dem Thema beschäftigen sich mit einer zeitlichen Modulation der Kontrollkraft [41, 42], dem Einfluss stabiler Exponenten des Orbits [43], zusätzlichen Verzögerungen in der Kontrollkraft [44] und raumzeitlicher Kontrolle [45].

Treten bei der Kopplung zweier chaotischer Systeme Zeitverzögerungen auf, hat das einen entscheidenden Einfluss auf das Synchronisationsverhalten. Da sich vollständige chaotische Synchronisation zur sicheren Datenübertragung anbietet [46, 47], spielt das Problem bei der Kopplung zweier Systeme über lange Strecken eine bedeutende Rolle [48–50]. Experimentell werden diese Systeme häufig mit gekoppelten, chaotischen Lasern realisiert. Dabei ist das Chaos häufig delay-induziert, d.h., erst durch eine Rückkopplung beginnt die Intensität des emittierten Laserlichts sich zeitlich zu verändern. Hierzu gibt es sowohl Arbeiten mit zwei [51–53] als auch mit mehreren Lasern [54]. Diese Systeme haben den Vorteil, dass die zeitverzögerte Kopplung über Lichtwellenleiter und Spiegelsysteme gut realisiert werden kann. In den meisten Fällen wird die stabile vollständige Synchronisation dadurch erreicht, dass zusätzlich eine Selbstrückkopplung hinzugefügt wird [55, 56]. Ohne diese Selbstrückkopplung wird in der Regel die Symmetrie der Synchronisation gebrochen, so dass eine Situation ähnlich der intermittenten verzögerten Synchronisation entsteht [19]. Analytische Arbeiten an Modellgleichungen [4, 53, 57–59] dieser Lasersysteme machen Aussagen über die Stabilität der synchronisierten Zustände und untersuchen die an den Rändern der Stabilitätsgebiete auftretenden Bifurkationen. Spezielle Arbeiten beschäftigen sich mit mehreren Zeitverzögerungen [60] oder Modulationen der Wechselwirkung [61].

Die Stabilitätsanalyse komplexer dynamischer Prozesse wie der vollständigen chaotischen Synchronisation erweist sich als eine der anspruchsvollsten Aufgaben dieses Themengebiets. Zwar ist die Stabilität dynamischer Systeme schon seit langem Gegenstand von Grundlagenforschung und Ingenieurskunst. Meistens geht es dabei aber um die Stabilitätsanalyse von Fixpunkten und die unterschiedlichen regeltechnischen Verfahren für deren Stabilisierung [62]. In komplexen Systemen koexistieren häufig unterschiedliche dynamische Zustände. Deren Stabilitätseigenschaften entscheiden dann darüber, welche Dynamik man tatsächlich beobachten kann. Die Stabilität vollständiger chaotischer Synchronisation ohne Zeitverzögerung wurde von Pecora untersucht [63, 64]. Mit Zeitverzögerung kommt das wesentliche Problem am deutlichsten bei antizipierender Synchronisation zum Vorschein. Dabei handelt es sich um zeitversetzte vollständige Synchronisation, die mithilfe einer gerichteten Kopplung derart stabilisiert wird, dass das getriebene System dem treibenden System vorausseilt und so dessen zukünftige Entwicklung anzeigt. Das Phänomen wurde zuerst von Voss dokumentiert [65]. Ein genaues Verständnis der nichttrivialen Wechselwirkung zwischen chaotischem Antrieb und zeitverzögerter (Rück-)Kopplung existiert bis auf einzelne Ansätze noch nicht [66, 67].

Ziel meiner Arbeit ist es, das Wechselspiel zwischen chaotischer Dynamik und zeitverzögerter Kopplung am Beispiel zweier identischer Oszillatoren mit experimentellen, numerischen und analytischen Methoden zu untersuchen. Dabei steht die vollständige chaotische Synchronisation im Vordergrund. Im ersten Kapitel zeige ich für allgemeine dynamische Systeme die möglichen Formen der Wechselwirkung, für die vollständige Synchronisation existiert. Dabei unterscheide ich zwischen invasiven und nicht-invasiven

Wechselwirkungen. Das Konzept der nicht-invasiven Wechselwirkung spielt eine wesentliche Rolle für die Stabilitätsanalyse, denn damit können separate Kopplungsparameter variiert werden, ohne dass die Dynamik im synchronen Zustand davon betroffen ist. Diese Variationen erlauben wiederum Rückschlüsse auf den Mechanismus der Stabilisierung. Im zweiten Kapitel stelle ich die verwendeten experimentellen Systeme vor und zeige die numerische Modellierung dieser Systeme. Kapitel 3 beschäftigt sich mit einer invasiven Kopplung der Systeme, die im synchronen Zustand eine Situation wie in der zeitverzögerten Rückkopplungskontrolle erzeugt. Ich wende dafür die Konzepte der Arbeit von Just an [32], um Aussagen über das Synchronisationsverhalten zu gewinnen. In Kapitel 4 untersuche ich die nicht-invasive Kopplung der Systeme und leite daraus analytische Modelle ab, die auf einer stochastischen Modellierung chaotischer Dynamik aufbauen (siehe [41, 68–73]). Die gewonnenen Aussagen werden anhand experimenteller Daten und numerischer Simulationen überprüft. In einem Zusatzkapitel stelle ich einige erweiterte Methoden vor, die insbesondere für die Anwendung bei antizipierender Synchronisation geeignet sind.



1 Kopplungsschemata

Diese Arbeit beschäftigt sich mit zwei identischen Systemen, die miteinander wechselwirken können. Die möglichen Arten der Wechselwirkung werden in diesem Kapitel genannt, geordnet und diskutiert. Infolge der Wechselwirkung kann es unterschiedliche Synchronisationsphänomene geben. Dabei sind all diejenigen Formen der Synchronisation von Interesse, die man in einem erweiterten Sinne als vollständig verstehen kann. D.h., die Dynamik im $2N$ -dimensionalen Phasenraum kollabiert auf einer N -dimensionalen Synchronisationshyperebene.

1.1 Schemata für vollständige Synchronisation

Zwei identische dynamische Systeme

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{f}(\mathbf{y})\end{aligned}\tag{1.1}$$

besitzen eine gemeinsame Trajektorie

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t) .$$

Beobachtet man ein solches Verhalten, dann spricht man von *vollständiger Synchronisation*. In der Praxis reicht es aber in der Regel nicht aus, beide Systeme zum Zeitpunkt t_0 mit identischen Startbedingungen $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{y}(t_0)$ zu initiieren. Theoretisch würden zwei identische Systeme mit identischen Startbedingungen auch identischen Trajektorien folgen. Im Falle von chaotischer Dynamik wären diese Trajektorien aber instabil, so dass jede noch so kleine Störung der vollständigen Synchronisation nach endlicher Zeit dazu führen würde, dass $\mathbf{x}(t)$ und $\mathbf{y}(t)$ signifikant voneinander abweichen. Dies entspräche einer Visualisierung des Butterfly-Effektes. Es macht prinzipiell keinen Unterschied, ob man ein einzelnes System unter einer Störung betrachtet oder stattdessen zwei identische Systeme. Die Störung eines Systems entwickelt sich exakt so wie eine entsprechende Differenz zwischen den zwei Systemen in Gln. (1.1), d.h., es gibt ein Äquivalenzprinzip

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) + \delta \mathbf{x}(t) .\tag{1.2}$$

Entsprechend der Vertauschungssymmetrie von zwei identischen dynamischen Systemen wende ich im Folgenden eine geeignete Koordinatentransformation an, nämlich

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \frac{1}{2}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \\ \mathbf{v} &= \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) .\end{aligned}\tag{1.3}$$

Die Koordinaten \mathbf{u} und \mathbf{v} werden als *longitudinale* und *transversale* Koordinate bezeichnet. Der synchrone Zustand wird durch $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{u} = \mathbf{x} = \mathbf{y}$ beschrieben. Die Bewegungsgleichungen lauten dabei

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{f}(\mathbf{u}) \\ \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{0} .\end{aligned}$$

Um die Zeitentwicklung einer kleinen Störung mit $|\mathbf{v}| \approx 0$ zu betrachten, entwickelt man die Bewegungsgleichungen nach dieser Größe und erhält in linearer Näherung für den fast vollständig synchronen Zustand

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{f}(\mathbf{u}) \\ \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{Df}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} .\end{aligned}\tag{1.4}$$

Die Transformation (1.3) in longitudinale und transversale Koordinaten zusammen mit der linearen Näherung für die Umgebung der Synchronisationshyperebene nenne ich im Folgenden die *LT-Transformation* und \mathbf{u} und \mathbf{v} dann auch die *LT-Koordinaten*. Die linearen Gleichungen der transversalen Koordinate bilden ein *lineares Tangentialsystem* (LTS), das man sich vorstellen kann wie das begleitende Dreibein einer mechanischen Trajektorie. Eine Lösung $\mathbf{v}(t)$ des LTS nenne ich den (linearen) *Abstandsvektor*.

Lässt man eine Wechselwirkung zwischen den dynamischen Systemen zu, so ändert sich deren Verhalten. Die allgemeinste Form zweier Systeme mit symmetrischer Wechselwirkung lässt sich schreiben als

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{F}_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{F}_k(\mathbf{y}, \mathbf{x}),\end{aligned}\tag{1.5}$$

wobei \mathbf{k} etwaige Wechselwirkungsparameter derart beinhaltet, dass sich für $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ der Spezialfall zweier wechselwirkungsfreier dynamischer Systeme ergibt

$$\mathbf{F}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Ferner können zwei Klassen von Wechselwirkungen unterschieden werden. Verschwindet im Fall vollständiger Synchronisation die Kraft, die die dynamischen Systeme aufeinander ausüben, dann ist die Wechselwirkung *nicht-invasiv*. Explizit heißt das, dass

$$\mathbf{F}_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Andernfalls wird die Wechselwirkung als *invasiv* bezeichnet.

Für den fast vollständig synchronen Zustand kann man die Entwicklung nach einer kleinen Differenz wie oben vornehmen. Man erhält

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{F}_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \mathbf{K} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{F}_k(\mathbf{y}, \mathbf{y}) + \mathbf{K} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}),\end{aligned}\tag{1.6}$$

wobei $\mathbf{K} = \mathbf{D}_2 \mathbf{F}_k(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ ist und im Folgenden als die *Kopplung* zwischen den Systemen bezeichnet wird. Für $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ ist per Konstruktion auch $\mathbf{K} = \mathbf{0}$. Für nicht-invasive Wechselwirkung reduzieren sich die Gln. (1.6) auf

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{K} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{f}(\mathbf{y}) + \mathbf{K} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}).\end{aligned}\tag{1.7}$$

Hierbei hängt \mathbf{K} noch von den Wechselwirkungsparametern \mathbf{k} und vom Schwerpunkt \mathbf{u} der Trajektorien ab. Im einfachsten Fall einer linearen nicht-invasiven Wechselwirkung mit nur einem Parameter k und konstanter Kopplung sind die Gln. (1.7) exakt, auch wenn \mathbf{x} und \mathbf{y} nicht bereits sehr eng beieinander sind. Dann kann man die Kopplung schreiben als

$$\mathbf{K} = k \cdot \mathbf{Q}\tag{1.8}$$

mit $\|\mathbf{Q}\| = 1$. Kopplungen dieser Art werde ich in meiner Arbeit untersuchen. Das Kopplungsschema (1.6) schreibt sich in den longitudinalen und transversalen Koordinaten

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{F}_k(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \\ \dot{\mathbf{v}} &= (\mathbf{D}_1 \mathbf{F}_k(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - \mathbf{K}) \cdot \mathbf{v}.\end{aligned}$$

Im invasiven Fall unterscheidet sich $\mathbf{F}_k(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ von $\mathbf{f}(\mathbf{u})$, sodass die Systeme auch bei vollständiger Synchronisation noch Kräfte aufeinander ausüben. Im nicht-invasiven Fall ergibt sich

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{f}(\mathbf{u}) \\ \dot{\mathbf{v}} &= (\mathbf{Df}(\mathbf{u}) - 2\mathbf{K}) \cdot \mathbf{v},\end{aligned}$$

d.h., die gemeinsame Trajektorie wird von der Kopplung nicht beeinflusst. Im Falle vollständiger Synchronisation folgen die Systeme der Dynamik eines einzelnen freien Systems. Dazu muss die Hälfte der nicht stabilen Freiheitsgrade von zwei freien Systemen durch die Kopplung stabilisiert werden. Diese wirkt in der transversalen Koordinate bei geschickter Wahl von \mathbf{K} wie eine Dämpfung, die schließlich die Stabilisierung und damit die Konvergenz der Trajektorien bewirkt.

1.1.1 Unidirektionale Wechselwirkung

Die zuvor diskutierten Schemata zeichneten sich durch ihre Symmetrie gegen Vertauschung der Systeme aus. Dies ist sicherlich ein spezieller Grenzfall dessen, was man in der Natur vorfindet oder in der praktischen Anwendung realisieren kann. Einen anderen Grenzfall bilden die *Master-Slave-Kopplungen* (oder auch *Drive-Response-Kopplungen*). Dabei wirkt zwar das eine System auf das andere, aber nicht umgekehrt. Im allgemeinsten Fall kann man Systeme mit gerichteter Wechselwirkung schreiben als

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{F}_k(\mathbf{y}, \mathbf{x}),\end{aligned}\tag{1.9}$$

wobei \mathbf{x} das Mastersystem und \mathbf{y} das Slavesystem ist. Im Gegensatz zur bidirektionalen, symmetrischen Wechselwirkung ist hier keine vollständige Synchronisation möglich, wenn die Kopplung invasiv ist. Für den nicht-invasiven Fall werden Gln. (1.9) in linearer Näherung zu

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{f}(\mathbf{y}) + \mathbf{K} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}).\end{aligned}\tag{1.10}$$

Hier ist $\mathbf{K} = \mathbf{D}_2 \mathbf{F}_k(\mathbf{y}, \mathbf{y})$ die Kopplung nahe der Synchronisationshyperebene. Im einfachsten Fall ist \mathbf{K} zeitlich konstant wie in Gl. (1.8). Stabile vollständige Synchronisation bedeutet dann, dass alle Freiheitsgrade des getriebenen Systems \mathbf{y} infolge der Kopplung stabil sind.

Bei der nicht-invasiven Master-Slave-Kopplung ist aber noch eine andere Form der Synchronisation denkbar, nämlich die zeitversetzte Synchronisation. Dazu muss der Fluss des Mastersystems in der Ankopplung an das Slavesystem enthalten sein. Sei die zu dem Vektorfeld $\mathbf{f}(\cdot)$ gehörige Flussfunktion $\Phi_t : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ definiert als

$$\Phi_t(\xi(0)) = \xi(t),$$

wobei $\xi(t)$ eine beliebige Trajektorie des dynamischen Systems \mathbf{x} mit $\dot{\xi}(t) = \mathbf{f}(\xi(t))$ ist. Dann existiert ein nicht-invasives, unidirektionales Schema vom Typ Gl. (1.9) derart, dass für eine Zeitverschiebung $\theta \in \mathbb{R}$ die Entwicklung

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{f}(\mathbf{y}) + \mathbf{K} \cdot (\Phi_\theta(\mathbf{x}) - \mathbf{y})\end{aligned}\tag{1.11}$$

mit $\mathbf{K} = \mathbf{D}_2 \mathbf{F}_k(\mathbf{y}, \Phi_{-\theta}(\mathbf{y})) \cdot (\mathbf{D} \Phi_{-\theta}(\mathbf{y}))$ möglich ist. Die Synchronisation $\mathbf{y} = \Phi_\theta(\mathbf{x})$ wird für $\theta < 0$ als *verzögerte Synchronisation* und für $\theta > 0$ als *antizipierende Synchronisation* bezeichnet. Für den Spezialfall $\theta = 0$ stimmen Gln. (1.11) mit Gln. (1.10) überein und es ist vollständige Synchronisation möglich. Die Stabilität der Synchronisation hängt von \mathbf{K} ab.

Die obige Entwicklung ist aber nicht zwingend so wie angegeben. Im Gegenteil, die direkte Entwicklung wäre sogar

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{f}(\mathbf{y}) + \mathbf{K} \cdot (\mathbf{x} - \Phi_{-\theta}(\mathbf{y}))\end{aligned}$$

mit $\mathbf{K} = \mathbf{D}_2 \mathbf{F}_k(\mathbf{y}, \Phi_{-\theta}(\mathbf{y}))$. Der Unterschied zur vorherigen Entwicklung ist lediglich eine Zeittranslation in der Kopplung um $-\theta$. Diese wird approximiert mithilfe der Evolutionsmatrix $\mathbf{L}_t := \mathbf{D} \Phi_t$, der Jakobimatrix der Flussabbildung. Mit $\mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \Phi_\theta(\mathbf{x}))$ ist also

$$\begin{aligned}\mathbf{x} - \Phi_{-\theta}(\mathbf{y}) &= \mathbf{x} - \Phi_{-\theta}(\Phi_\theta(\mathbf{x}) + 2\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{x} - \underbrace{\Phi_{-\theta}(\Phi_\theta(\mathbf{x}))}_{\mathbf{x}} - \mathbf{L}_{-\theta}(\Phi_\theta(\mathbf{x})) \cdot (2\mathbf{v}) + \mathcal{O}(|\mathbf{v}|^2) \\ &= \underbrace{\mathbf{L}_{-\theta}(\mathbf{y} - 2\mathbf{v})}_{\mathbf{L}_{-\theta}(\mathbf{y}) + \mathcal{O}(|\mathbf{v}|)} \cdot (-2\mathbf{v}) + \mathcal{O}(|\mathbf{v}|^2) \\ &= \mathbf{L}_{-\theta}(\mathbf{y}) \cdot (\Phi_\theta(\mathbf{x}) - \mathbf{y}) + \mathcal{O}'(|\mathbf{v}|^2)\end{aligned}$$

1.2 Schemata mit Zeitverzögerungen

Eine Zeitverschiebung kann wie oben beschrieben mithilfe der Flussfunktion Φ_θ erzeugt werden. Diese Funktion gilt per Definition nur für ein bestimmtes dynamisches System. Möchte man Systeme beschreiben, bei denen eine Zeitverschiebung ein fester Bestandteil der Dynamik selbst ist, reicht diese Funktion nicht mehr aus. Zwar ist ein dynamisches System der Art

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \Phi_\theta(\mathbf{x}))$$

noch wohldefiniert. Aber dann ist Φ_θ im Allgemeinen nicht die Flussabbildung dieses Systems. Wollte man eine ‘echte’ Zeitverschiebung als Teil der Dynamik mit einer angepassten Flussabbildung beschreiben, so würde diese implizit von sich selbst abhängen. Dies führt zu allerhand Schwierigkeiten, die hier nicht diskutiert werden sollen. Stattdessen sei hier nur genannt, dass eine echte Zeitverschiebung in einem dynamischen System problematisch ist, wenn dadurch auf die Zukunft zugegriffen wird.

Das Gegenstück zur Vorwegnahme der Zukunft ist die Zeitverzögerung. Man kann davon ausgehen, dass diese in realen dynamischen Systemen sehr viel häufiger vorkommt als eine Abschätzung zukünftigen Verhaltens¹. Zumindest konzentriert sich die aktuelle Forschung intensiv auf dieses Gebiet. Auch in dieser Arbeit werden im Wesentlichen Phänomene im Zusammenhang mit Zeitverzögerung untersucht. Eine Zeitverzögerung tritt dann auf, wenn in einem dynamischen Prozess die Ausbreitung eines Signals mit einer endlichen Geschwindigkeit eine Rolle spielt, oder wenn Gedächtniseffekte auftreten, bei denen Information für eine Weile ‘eingefroren’ wird, bevor sie wieder aktiv ist. Die Gesamtheit der Prozesse mit Zeitverzögerung bietet sicherlich ein sehr reichhaltiges Spektrum an Phänomenen und Beschreibungen. Ich beschränke mich hier zunächst auf dynamische Systeme, in denen einzelne Freiheitsgrade um eine feste Verzögerungszeit hinterhereilen. Man kann sich also darunter ein gewöhnliches dynamisches System vorstellen, von dem einzelne Komponenten eine feste Weglänge mit endlicher Geschwindigkeit zurücklegen müssen

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_\tau) . \quad (1.12)$$

Dabei steht \mathbf{x}_τ für $\mathbf{x}(t - \tau)$ mit $\tau > 0$. Ein solches System bezeichne ich als *Delaysystem*. Mit der echten zeitverzögerten Rückkopplung wird die Dimension des dynamischen Systems formal unendlich groß. Das kann man sich anschaulich machen, wenn man sich einen gerichteten Wellenleiter zur Erzeugung der Zeitverzögerung denkt. Die unendlich vielen Freiheitsgrade des Delaysystems sind dann mit dem räumlichen Kontinuum des Wellenleiters zu identifizieren.

Tritt bei zwei identischen dynamischen Systemen eine Zeitverzögerung aufgrund von Signallaufzeiten in der Wechselwirkung auf, dann wird der allgemeine symmetrische Fall aus Gln. (1.5) zu

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{F}_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}_\tau) \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{F}_k(\mathbf{y}, \mathbf{x}_\tau) . \end{aligned} \quad (1.13)$$

Auch hier ist aufgrund der Symmetrie die vollständige Synchronisation eine Lösung dieser Gleichungen. Demnach ist auch eine Entwicklung nach einer kleinen Differenz wie in Gln. (1.6) möglich

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{F}_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_\tau) + \mathbf{K} \cdot (\mathbf{y}_\tau - \mathbf{x}_\tau) \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{F}_k(\mathbf{y}, \mathbf{y}_\tau) + \mathbf{K} \cdot (\mathbf{x}_\tau - \mathbf{y}_\tau) , \end{aligned} \quad (1.14)$$

wobei $\mathbf{K} = \mathbf{D}_2 \mathbf{F}_k(\mathbf{u}, \mathbf{u}_\tau)$ ist. Diese Entwicklung suggeriert, dass prinzipiell auch eine nicht-invasive Wechselwirkung mit den zeitverzögerten Komponenten möglich ist. Dafür müsste $\mathbf{F}_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_\tau) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ sein. Damit

¹ Das können in der Wirtschaft z.B. Prognosen für Märkte sein, die diese wiederum durch angepasstes Kauf- und Verkaufsverhalten beeinflussen.

das möglich ist, muss die verzögerte Komponente des fremden Systems mit der eigenen verzögerten Komponente verglichen werden, also wäre streng genommen

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{F}_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_\tau, \mathbf{y}_\tau) \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{F}_k(\mathbf{y}, \mathbf{y}_\tau, \mathbf{x}_\tau),\end{aligned}\tag{1.15}$$

d.h., die Systeme müssten auch jeweils eine Selbstrückkopplung haben. Um die Notation der Gln. (1.13) zu bewahren, könnte man einen nicht-invasiven Fall mit Hilfe der Flussfunktion erzeugen

$$\mathbf{F}_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}_\tau) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{K} \cdot (\mathbf{y}_\tau - \Phi_{-\tau}(\mathbf{x})).$$

Hierbei existiert zwar *eine* Lösung mit $\mathbf{x}_\tau = \Phi_{-\tau}(\mathbf{x})$, so dass $\mathbf{F}_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_\tau) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Diese ist aber nicht die einzige vollständig synchrone Lösung. Für alle anderen ist $\mathbf{x}_\tau \neq \Phi_{-\tau}(\mathbf{x})$. Das einfache Schema (1.13) ist also im Allgemeinen invasiv.

Beispiel ohne Selbstrückkopplung

Ein invasives Schema vom Typ der Gln. (1.14) ergibt sich aus dem nicht-invasiven instantanen Schema (1.7), wenn die Wechselwirkungskomponenten verzögert werden

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{K} \cdot (\mathbf{y}_\tau - \mathbf{x}) \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{f}(\mathbf{y}) + \mathbf{K} \cdot (\mathbf{x}_\tau - \mathbf{y}).\end{aligned}\tag{1.16}$$

In den LT-Koordinaten erkennt man den invasiven Charakter

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{f}(\mathbf{u}) + \mathbf{K} \cdot (\mathbf{u}_\tau - \mathbf{u}) \\ \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{Df}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} - \mathbf{K} \cdot (\mathbf{v}_\tau + \mathbf{v}).\end{aligned}\tag{1.17}$$

Die Differenz $\mathbf{u}_\tau - \mathbf{u}$ verschwindet in der Regel nicht. Man kann erwarten, dass sich die Lösungen qualitativ von denen eines frei laufenden Systems unterscheiden. Wendet man die Entwicklung wie in Gln. (1.14) an, so erhält man

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \underbrace{\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{K} \cdot (\mathbf{x}_\tau - \mathbf{x})}_{\mathbf{F}_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_\tau)} + \mathbf{K} \cdot (\mathbf{y}_\tau - \mathbf{x}_\tau) \\ \dot{\mathbf{y}} &= \underbrace{\mathbf{f}(\mathbf{y}) + \mathbf{K} \cdot (\mathbf{y}_\tau - \mathbf{y})}_{\mathbf{F}_k(\mathbf{y}, \mathbf{y}_\tau)} + \mathbf{K} \cdot (\mathbf{x}_\tau - \mathbf{y}_\tau).\end{aligned}\tag{1.18}$$

Man kann diese Situation auch als zwei nicht-invasiv gekoppelte Delaysysteme verstehen. Die Selbstrückkopplung bildet einen Teil der Systemdynamik und für die Gegenkopplung gilt $(\mathbf{y}_\tau - \mathbf{x}_\tau) = (\mathbf{y} - \mathbf{x})_\tau$, d.h., die Delaysysteme sind durch eine quasi-instantane Differenzkopplung verbunden, die in der Zeit verzögert ist.

Beispiele mit zusätzlicher Selbstrückkopplung

Die Klasse der Schemata mit Selbstrückkopplung Gln. (1.15) bietet eine reichere Auswahl an speziellen Schemata. Eine nicht-invasive Kopplung lässt sich wie besprochen realisieren mit einer zeitverzögerten Differenz, wie z.B.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{K} \cdot (\mathbf{y}_\tau - \mathbf{x}_\tau) \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{f}(\mathbf{y}) + \mathbf{K} \cdot (\mathbf{x}_\tau - \mathbf{y}_\tau).\end{aligned}\tag{1.19}$$

Das Besondere hierbei sieht man nach der LT-Transformation

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{f}(\mathbf{u}) \\ \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{Df}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} - 2\mathbf{K} \cdot \mathbf{v}_\tau\end{aligned}$$

Der nicht-invasive Charakter zeigt sich in der longitudinalen Koordinate, wogegen das transversale LTS neben dem Antrieb nur einen verzögerten Term besitzt.

Eine andere Kopplung entsteht bei einer Mischung von invasiver Selbstrückkopplung und invasiver Gegenkopplung

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\mathbf{K} \cdot (\mathbf{x}_\tau - \mathbf{x}) + \frac{1}{2}\mathbf{K} \cdot (\mathbf{y}_\tau - \mathbf{x}) \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{f}(\mathbf{y}) + \frac{1}{2}\mathbf{K} \cdot (\mathbf{y}_\tau - \mathbf{y}) + \frac{1}{2}\mathbf{K} \cdot (\mathbf{x}_\tau - \mathbf{y}).\end{aligned}\quad (1.20)$$

Wendet man hier die LT-Transformation an, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{f}(\mathbf{u}) + \mathbf{K} \cdot (\mathbf{u}_\tau - \mathbf{u}) \\ \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{Df}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} - \mathbf{K} \cdot \mathbf{v}.\end{aligned}$$

Durch die gemischte Kopplung ist also in der transversalen Koordinate der verzögerte Term verschwunden, während das gemeinsame dynamische System, das durch die longitudinale Koordinate beschrieben wird, mit dem der einfachen invasiven Kopplung Gln. (1.16) übereinstimmt.

Man kann diese Situation auch als den Spezialfall einer gemischten Kopplung mit beliebiger Wichtung begreifen. Sei der Mischungsparameter α wie folgt in die Kopplung eingebaut

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + (1 - \alpha)\mathbf{K} \cdot (\mathbf{x}_\tau - \mathbf{x}) + \alpha\mathbf{K} \cdot (\mathbf{y}_\tau - \mathbf{x}) \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{f}(\mathbf{y}) + (1 - \alpha)\mathbf{K} \cdot (\mathbf{y}_\tau - \mathbf{y}) + \alpha\mathbf{K} \cdot (\mathbf{x}_\tau - \mathbf{y}).\end{aligned}\quad (1.21)$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{f}(\mathbf{u}) + \mathbf{K} \cdot (\mathbf{u}_\tau - \mathbf{u}) \\ \dot{\mathbf{v}} &= (\mathbf{Df}(\mathbf{u}) - \mathbf{K}) \cdot \mathbf{v} + (1 - 2\alpha)\mathbf{K} \cdot \mathbf{v}_\tau.\end{aligned}$$

Die longitudinale Koordinate ist unabhängig von α und in der transversalen Richtung variiert α das Gewicht des verzögerten Terms. Für $\alpha = 0$ hat man zwei ungekoppelte Delaysysteme. Das transversale LTS entspricht dann genau einer Linearisierung der longitudinalen Koordinate. Nach dem Äquivalenzprinzip (1.2) beschreibt der Abstandsvektor in dem Fall also die Störung eines einzelnen Delaysystems.

Für $\alpha = 1$ erhält man den Fall der einfachen Gegenkopplung ohne Selbstrückkopplung wie in Gln. (1.16) und für $\alpha = 1/2$ den bereits genannten gemischten Fall der Gln. (1.20).

1.2.1 Unidirektionale Schemata

Im Allgemeinen kann eine unidirektionale Wechselwirkung in Form einer Master-Slave-Anordnung wie folgt geschrieben werden

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{F}_k(\mathbf{y}, \mathbf{x}_\tau).\end{aligned}$$

Hierbei ist aber $\mathbf{x}_\tau = \Phi_{-\tau}(\mathbf{x})$, weil keine Rückkopplung der verzögerten Komponente in das Mastersystem stattfindet. Demnach handelt es sich hierbei im Prinzip um dasselbe Schema wie in Gln. (1.9) mit denselben Formen der Synchronisation, falls die Wechselwirkung nicht-invasiv ist. Trotz der Anwesenheit eines verzögerten Terms bildet diese Anordnung also kein Delaysystem und es ist $\mathbf{F}_k(\mathbf{y}, \mathbf{x}_\tau) = \tilde{\mathbf{F}}_k(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

Eine völlig andere Situation entsteht, wenn zusätzlich eine Selbstrückkopplung in das Slavesystem möglich ist. Wegen dem eben genannten Argument führt erst diese dazu, dass das dynamische System zu einem Delaysystem wird

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \dot{\mathbf{y}} &= \tilde{\mathbf{F}}_k(\mathbf{y}, \mathbf{y}_\tau, \mathbf{x}) \\ &= \mathbf{F}_k(\mathbf{y}, \mathbf{y}_\tau, \mathbf{x}_{\tau_M}).\end{aligned}\quad (1.22)$$

Die resultierende Zeitverschiebung, bei der die jeweiligen Funktionen \tilde{F}_k oder F_k nicht-invasiv werden, hängt von der Differenz $\Delta\tau = \tau - \tau_M$ ab. Bei $\Delta\tau = 0$ existiert vollständige, bei $\Delta\tau < 0$ verzögerte und bei $\Delta\tau > 0$ antizipierende Synchronisation. Die Entwicklung nahe der Synchronisationsebene lautet wegen des nicht-invasiven Charakters

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{f}(\mathbf{y}) + \mathbf{K} \cdot (\mathbf{x}_{\tau_M} - \mathbf{y}_\tau),\end{aligned}\tag{1.23}$$

wobei $\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{F}_k(\mathbf{y}, \mathbf{y}_\tau, \mathbf{y}_\tau)$ und $\mathbf{K} = \mathbf{D}_3 \mathbf{F}_k(\mathbf{y}, \mathbf{y}_\tau, \mathbf{y}_\tau)$ ist.

Darüber hinaus kann das Mastersystem selbst auch ein Delaysystem sein. Dann lässt sich die verzögerte Komponente zwar nicht mehr einfach durch die instantane ausdrücken. Durch die gerichtete Wechselwirkung bleibt aber dennoch die Aussage erhalten, dass die zusätzliche Zeitverzögerung um $\tau_M \neq 0$ prinzipiell nichts gegenüber $\tau_M = 0$ ändert. Es entsteht eine zusätzliche Zeittranslation, aber keine qualitative Änderung der Dynamik. Die obigen Überlegungen sind also auch gültig im Fall

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_\tau) \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{F}_k(\mathbf{y}, \mathbf{y}_\tau, \mathbf{x}_{\tau_M}),\end{aligned}\tag{1.24}$$

aus dem die Entwicklung

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_\tau) \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{y}_\tau) + \mathbf{K} \cdot (\mathbf{x}_{\tau_M} - \mathbf{y}_\tau)\end{aligned}$$

folgt mit $\mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{y}_\tau) = \mathbf{F}_k(\mathbf{y}, \mathbf{y}_\tau, \mathbf{y}_\tau)$ und der Kopplung $\mathbf{K} = \mathbf{D}_3 \mathbf{F}_k(\mathbf{y}, \mathbf{y}_\tau, \mathbf{y}_\tau)$ wie vorher.

In LT-Koordinaten lassen sich auch die unidirektionalen Schemata mit verzögerten Komponenten darstellen. Dazu muss die Transformation angepasst werden

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{x} \\ \mathbf{v} &= \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{x}_{-\Delta\tau}).\end{aligned}$$

Dann erhält man damit

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_\tau) \\ \dot{\mathbf{v}} &= \underbrace{\mathbf{D}_1 \mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_\tau) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{D}_2 \mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_\tau) \cdot \mathbf{v}_\tau - \mathbf{K} \cdot \mathbf{v}_\tau}_{:= \mathbf{Df}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_\tau) \cdot (\mathbf{v}, \mathbf{v}_\tau)}.\end{aligned}$$

Beispiele

Voss hat zwei Kopplungsschemata vom Typ der Gln. (1.24) vorgestellt [65], die beide mithilfe von Zeitverzögerungen antizipierende Synchronisation bewirken. Das erste ist für skalare Systeme und lautet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\beta x + f(x_\tau) \\ \dot{y} &= -\beta y + f(x).\end{aligned}$$

Der synchrone Zustand ist durch $y_\tau = x$ gegeben. Die Entwicklung dieser Gleichungen ergibt

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\beta x + f(x_\tau) \\ \dot{y} &= -\beta y + f(y_\tau) + k(x - y_\tau)\end{aligned}$$

mit $k = f'(x)$. Die Stabilisierung der Synchronisation wird durch die Dämpfung β bewirkt. Es zeigt sich aber schon derjenige Term, den Voss für die Kopplung allgemeiner dynamischer Systeme in seinem zweiten Schema vorgeschlagen hat, falls die Zeitverzögerung nicht Teil der Systeme selbst ist. Dabei handelt es sich einfach um das Schema, das sich aus Gln. (1.23) ergibt, wenn die lineare Kopplung im ganzen Phasenraum gilt mit $\mathbf{K} = k\mathbf{1}$ und $\tau_M = 0$:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{f}(\mathbf{y}) + k(\mathbf{x} - \mathbf{y}_\tau).\end{aligned}$$

Für hinreichend kleine τ wirkt hier die Kopplung wie eine Dämpfung in \mathbf{y} und bewirkt die Stabilisierung der antizipierenden Synchronisation.

1.3 Sonstige Schemata

Zur Untersuchung spezieller Synchronisationsphänomene kann es hilfreich sein, die Kopplungsparameter im transversalen LTS zu variieren, während die gemeinsame Trajektorie von der Variation unberührt bleibt. In den unidirektionalen Schemata ist dies ohne Weiteres möglich. In den bidirektionalen Schemata folgt aus Symmetrieüberlegungen, dass dies mithilfe zusätzlicher Kopplungen auch möglich ist. Die Variation mithilfe des Parameters α im Schema (1.21) ist nur ein Beispiel dafür. Möchte man z.B. im LTS des Schemas (1.16) die gesamte Kopplung \mathbf{K} variieren, so kann durch das Hinzufügen einer gemischten Kopplung in den ursprünglichen Gleichungen

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{K}'(\mathbf{y}_\tau - \mathbf{x}) + (\mathbf{K}_0 - \mathbf{K}') \cdot (\mathbf{x}_\tau - \mathbf{y}) \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{f}(\mathbf{y}) + \mathbf{K}'(\mathbf{x}_\tau - \mathbf{y}) + (\mathbf{K}_0 - \mathbf{K}') \cdot (\mathbf{y}_\tau - \mathbf{x})\end{aligned}$$

erreicht werden, dass die longitudinale Koordinate von der Variation in \mathbf{K}' unberührt bleibt

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{f}(\mathbf{u}) + \mathbf{K}_0(\mathbf{u}_\tau - \mathbf{u}) \\ \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{Df}(\mathbf{u})\mathbf{v} + \underbrace{(\mathbf{K}_0 - 2\mathbf{K}')}_{-\mathbf{K}} \cdot (\mathbf{v}_\tau + \mathbf{v}).\end{aligned}\tag{1.25}$$

Für $\mathbf{K}' = \mathbf{K}_0$ ist auch $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0$ und man erhält das ursprüngliche Schema (1.16). Es ist auch möglich, zusätzlich den Fall $\alpha = 0$ in dem Schema unterzubringen, so dass mit dem Äquivalenzprinzip (1.2) eine Variation von \mathbf{K} im longitudinalen LTS untersucht werden kann. Die Kopplungen sind dann

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{K}'(\mathbf{x}_\tau - \mathbf{x}) + (\mathbf{K}_0 - \mathbf{K}') \cdot (\mathbf{y}_\tau - \mathbf{y}) \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{f}(\mathbf{y}) + \mathbf{K}'(\mathbf{y}_\tau - \mathbf{y}) + (\mathbf{K}_0 - \mathbf{K}') \cdot (\mathbf{x}_\tau - \mathbf{x})\end{aligned}$$

und damit folgt

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{f}(\mathbf{u}) + \mathbf{K}_0(\mathbf{u}_\tau - \mathbf{u}) \\ \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{Df}(\mathbf{u})\mathbf{v} + \mathbf{K}(\mathbf{v}_\tau - \mathbf{v}).\end{aligned}\tag{1.26}$$

Variationen im Tangentialsystem sind also grundsätzlich gerechtfertigt und können bei Bedarf auch experimentell implementiert werden.

2 Experimentelles System

Es gibt mehrere Kriterien für die Auswahl eines geeigneten Systems zur experimentellen Untersuchung der chaotischen Synchronisation. Für diese Arbeit kommen elektronische Schwingkreise in Frage. Carroll und Pecora haben die allgemeinen Vorzüge solcher Oszillatoren gezeigt und mit vielen Anwendungsbeispielen und Forschungsergebnissen illustriert [74]. Darunter hat sich der Diodenresonator durch seine Robustheit und die einfache Konstruktion besonders bewährt. Die typische Zeitskala der Oszillationen von wenigen μs ist aber in der Praxis sehr schlecht geeignet für Experimente mit einer hochwertigen und systematischen Zeitverzögerung. Mit dem Einsatz von Kabeln als Wellenleiter lassen sich typische Verzögerungszeiten von 1 bis 100 ns realisieren. Das ist zu kurz für den Diodenresonator, da die interessanten Phänomene in der Größenordnung der Oszillationsperiode zu erwarten sind. Außerdem sind Kabel unflexibel in Hinsicht auf die Wahl der Verzögerungszeit. Ähnliches gilt auch für die in unserer Gruppe benutzten analogen Verzögerungsglieder, mit denen man wenigstens bei einigen passenden Verzögerungszeiten Versuche durchführen könnte. Die digitalen Verzögerungsleitungen sind schließlich wegen ihrer beschränkten Bandbreite für die Signale des Diodenresonators ungeeignet und arbeiten auf vergleichsweise langen Zeitskalen im ms -Bereich. Letztere ziehe ich aber wegen der guten Übertragungsqualität und der nahezu beliebig wählbaren Verzögerungszeit vor. Eine Verlangsamung des nichtlinearen Oszillators um mehrere Größenordnungen ist die nötige Konsequenz. Außerdem ist es wünschenswert, ein autonomes System zu haben, um ohne Weiteres auch zeitversetzte Synchronisation untersuchen zu können. Ein anderes Kriterium für die Wahl eines geeigneten Oszillators ist die Eigenschaft, über einen möglichst großen Parameterbereich chaotische Dynamik zu zeigen. Die Zeltabbildung und das Lorenzsystem sind zwei numerische Beispiele dafür. Pecora et al. stellen einen elektronischen Oszillator vor [63], der dem Rösslersystem [75] nachempfunden ist. Dieser Schwingkreis kann als ein autonomer Diodenoszillator verstanden werden, der im kHz -Bereich schwingt. Er ist also prinzipiell für meine Untersuchungen geeignet. Seine Eigenschaften und Parameter passe ich zusätzlich den speziellen Anforderungen dieser Arbeit sowie den verwendeten Bauteilen und Geräten an.

2.1 Konstruktion des autonomen Diodenoszillators

Der Diodenresonator benötigt einen externen Antrieb. Das ist im Regelfall eine sinusförmige Spannung, deren Amplitude, Frequenz und Offset als Systemparameter gesehen werden können. In Pecoras Schwingkreis wird die Funktion des Antriebs von der linearen Komponente des Oszillators übernommen, die eine entdämpfte harmonische Schwingung erzeugt, wenn man sie isoliert. Hinreichend dafür wäre ein LC-Glied mit einer aktiven Komponente zur Energiezufuhr, wie es schon in einer Meißner'schen Rückkopplungsschaltung umgesetzt wurde. Pecora benutzt stattdessen eine Reihe von Operationsverstärkern, von denen zwei mit einer RC-Schaltung versehen sind und als Integratoren dienen. Ausschnitt A der Abb. 2.1 ist der entsprechende Teil des Pecora-Schwingkreises, den ich mit veränderten Bauteilen auch in meiner Schaltung verwende. Die beiden Widerstände R_s dienen der Stabilisierung der Integratoren, indem sie die hohe Verstärkung niederfrequenter Störsignale begrenzen. Der dritte Operationsverstärker arbeitet als invertierender Addierer. Dabei sorgt die Rückkopplung durch den Widerstand R_a für den Antrieb des Systems, der der Dissipation in R_s entgegenwirkt. Mit den Spannungen U_1 und U_2 an den entsprechenden Ausgängen der Integratoren gilt für dieses Teilsystem

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{pmatrix} = \omega_0 \begin{pmatrix} -c & -1 \\ 1 & a - c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Dabei ist $\omega_0 = 1/RC$, $a = R/R_a$ und $c = R/R_s$. Im Allgemeinen entsteht aus diesen Bewegungsgleichungen eine Spirale um den Fixpunkt im Ursprung, die instabil ist für $a > 2c$ und stabil für $a < 2c$. Für

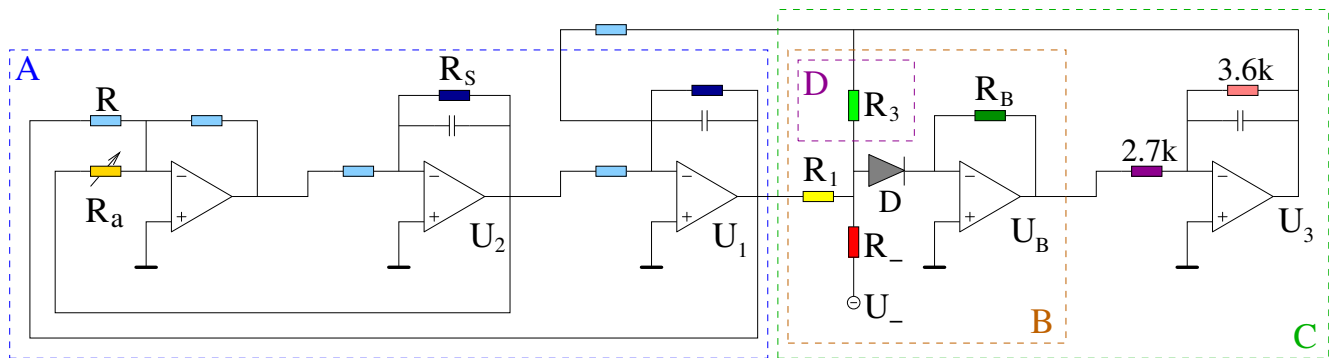


Abbildung 2.1: Der autonome Diodenschwingkreis. Operationsverstärker TL084, Diode DC 1N4007, Folienkondensatoren $C = 10nF$ mit 5% Toleranz, Widerstände mit 1% Toleranz. $R = 10k\Omega$, $R_a = 10k\Omega/a$, $R_- = 33k\Omega$, $R_1 = 7.5k\Omega$, $R_3 = 15k\Omega$, $R_B = 13k\Omega$ und $R_s = 200k\Omega$.

$a = 2c$ heben Antrieb und Dämpfung sich gegenseitig auf und es entsteht eine harmonische Schwingung konstanter Amplitude mit der Umlauffrequenz $f = \frac{\omega_0}{2\pi} \sqrt{1 - c^2} = 1.6 \text{ kHz}$.

Es ist nicht Sinn dieser Konstruktion, einen gewöhnlichen Diodenresonator zu haben, der einfach nur von einem internen harmonischen Oszillator anstatt von einem externen Signal getrieben wird. Dieses Argument wird klar, wenn man die Funktionsweise eines Diodenresonators genauer betrachtet. Aus der Sperrschichtkapazität der Diode, d.h. $C(U_D = 0) \approx 20pF$, und einer typischen Induktivität von $L = 1mH$ ergibt sich eine Resonanzfrequenz von $f_R \approx 1.1MHz$ für schwache Anregung. Derjenige Frequenzbereich, für den man bei Vergrößerung der Amplitude dann am ehesten eine Route ins Chaos findet, liegt in der Regel in derselben Größenordnung wie f_R , eher geringfügig zu kleineren Frequenzen hin verschoben¹. Geht man aber zu deutlich kleineren Frequenzen über, so steigen die typischen Amplituden für den Einsatz chaotischer Dynamik stark an, siehe auch das Phasendiagramm für den Diodenresonator in [74]. Zusätzlich verschwinden chaotische Bereiche vollständig, bis schließlich bei sehr kleinen Frequenzen das Wechselspiel zwischen Induktivität und Kapazität vernachlässigbar wird. Dann wird aus der Sicht des schnellen schwingungsfähigen Systems nur noch quasistatisch die Spannung moduliert und man kann am Widerstand des Resonators die Diodenkennlinie aufzeichnen. Aus diesem Grund hat die Diode in Pecoras Schwingkreis eine andere Funktion als im Diodenresonator. Die Induktivität fehlt in der Schaltung ganz, da der induktive Widerstand verglichen mit den verwendeten Ohm'schen Widerständen keinen wesentlichen Beitrag mehr leistet. Der Operationsverstärker B gibt eine Spannung aus, die proportional zum Diodenstrom ist, siehe Gl. (A.1). Eine Oszillation bei etwa $1.6kHz$ ist für die Diode hinreichend langsam, sodass der Diodenstrom näherungsweise der Gleichstromcharakteristik entspricht. Das Resultat ist eine Spannung, die eine nichtlineare Funktion von U_1 ist. Damit wird der dritte Integrator getrieben. Der Einsatz dieses Gliedes ist auch wichtig, da die Freiheitsgrade aus Induktivität und Kapazität in dem Frequenzbereich nicht aktiv sind. Der dritte Integrator liefert also die für Chaos notwendige dritte Komponente im Sinne des Poincaré-Bendixson-Theorems. Durch Rückkopplung der U_3 -Komponente in das ansonsten lineare System (2.1) wird diesem also ein Rückfaltungprozess hinzugefügt, sobald die Amplitude einen Schwellenwert überschreitet. Die Dynamik ist vollkommen analog zu der des Rösslersystems. Der Unterschied besteht in der Nichtlinearität, durch die die U_3 -Komponente aktiviert wird.

Bei der Nichtlinearität befindet sich die wesentliche Modifikation gegenüber dem Pecora-Schwingkreis, die ich außer dem Skalieren sämtlicher Bauteilwerte für meinen autonomen Diodenoszillator vorgenommen habe. Es ist für die spätere Analyse wünschenswert, dass der Ausschlag der U_3 -Komponente nur

¹ Im mechanischen Analogon entspricht das dem Effekt der 'weichen Feder', d.h., die Federkonstante nimmt mit zunehmender Amplitude ab. Wie bei einem springenden Ball sinkt damit auch die Eigenfrequenz.

einen bestimmten Bruchteil der Periodendauer des Schwingkreises andauert. Für die übrige Zeit sollte die Dissipation in dieser Dimension möglichst groß sein, sodass im Wesentlichen nur die Spiralbewegung in der U_1 - U_2 -Ebene stattfindet. Der Pecora-Schwingkreis erfüllt dieses Kriterium nur sehr unvollkommen. Das Problem lässt sich zwar prinzipiell durch eine Optimierung der vorhandenen Parameter lösen, würde aber zu extremen Bauteil- und Spannungswerten führen und lässt sich daher praktisch nicht umsetzen. Würde man als Alternative nur die Dissipation in der U_3 -Komponente vergrößern, während andere Teile im Normbereich bleiben, führte das effektiv dazu, dass dieser für das Chaos entscheidende Freiheitsgrad einfriert. Dann wäre nämlich die U_3 -Komponente im Sinne einer adiabatischen Näherung nur noch eine Funktion der U_1 -Komponente. Meine Lösung besteht darin, dass ich stattdessen eine passende zusätzliche Rückkopplung der U_3 -Komponente durch die Diode hinzufüge, damit die Dissipation für die Dauer des Ausschlags aufgehoben wird.

2.2 Eigenschaften des Schwingkreises

Durch die starke Ähnlichkeit der Bewegungsgleichungen (2.3) mit denen des Rösslersystems gibt es auch eine gute Übereinstimmung des Bifurkationsszenarios als Funktion des Parameters a . Die Bifurkationspunkte sind dabei hin zu größeren Werten von a verschoben. Das liegt an den zusätzlichen Dämpfungen in U_1 und U_2 , weshalb die Verschiebung genau $2c = 0.1$ beträgt. Im Wesentlichen beobachtet man ein typisches Feigenbaumszenario, siehe Abb. 2.2. Die Hopf-Bifurkation bei $a_0 \approx 2c$ wirkt gegenüber der Normalform sehr verzerrt, da die Nichtlinearität für Spannungen unterhalb des Schwellenwertes praktisch nicht existiert. Oberhalb von $a_F \approx 0.3$ geht der Attraktor in den von den Rösslergleichungen bekannten Trichterattraktor über. Diese Eigenschaft macht sich beim Erstellen eines Bifurkationsdiagramms mithilfe der Extrema aus den Zeitreihen dadurch bemerkbar, dass beim Überschreiten von a_F scheinbar ein zweites Attraktorband auftaucht. Dieses ist aber nur ein Artefakt der doppelten Spiralbewegung in diesem speziellen Attraktor. Abb. 2.3 zeigt Projektionen typischer Trajektorien aus dem autonomen Diodenoszillator zu unterschiedlichen Werten des Antriebsparameters.

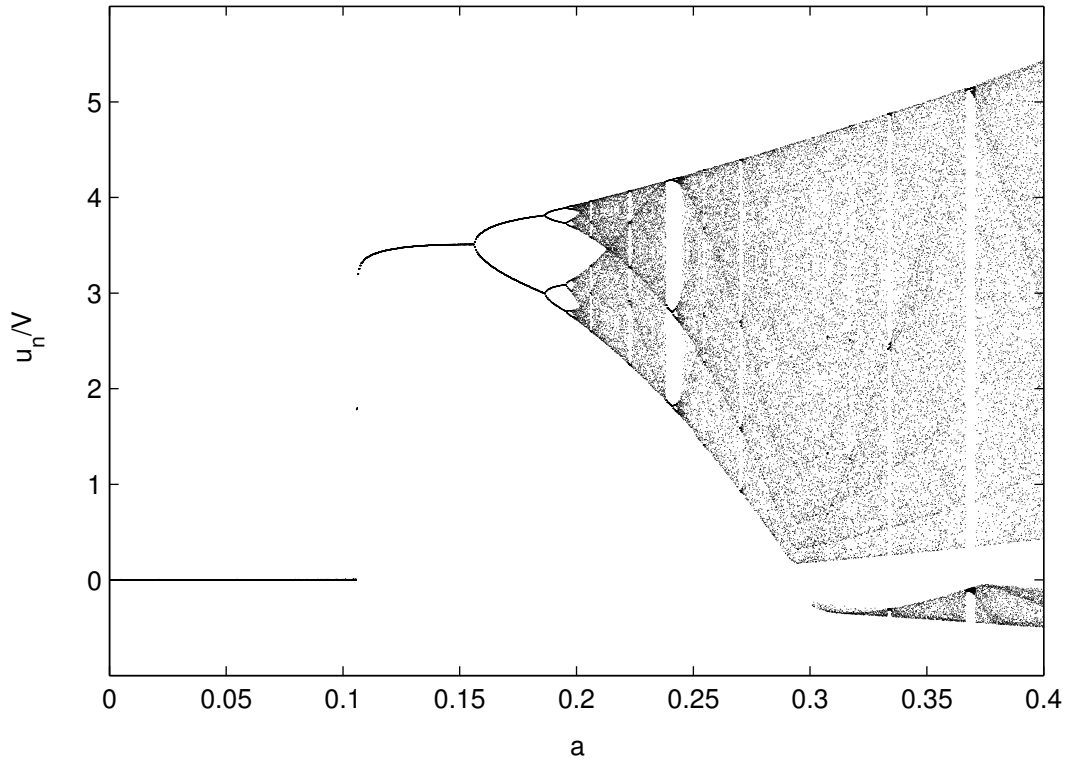
Im Zusammenhang mit Zeitverzögerungen spielt die Zeitskala der Oszillatoren eine wichtige Rolle. Daher ist es angebracht, diese sauber zu definieren und zu vermessen. Eine Größe wie die Periodendauer periodischer Oszillationen ist im Chaos selten wohldefiniert. Dasselbe Problem taucht bei der Untersuchung von Phasensynchronisation mit der Definition der Phase auf, siehe [7, 11, 12]. Ist nämlich ein Phasenwinkel $\phi(t)$ erst definiert, so kann man z.B. eine Periodendauer über die Winkelgeschwindigkeit festlegen

$$T := \frac{2\pi}{\langle \dot{\phi}(t) \rangle_t}.$$

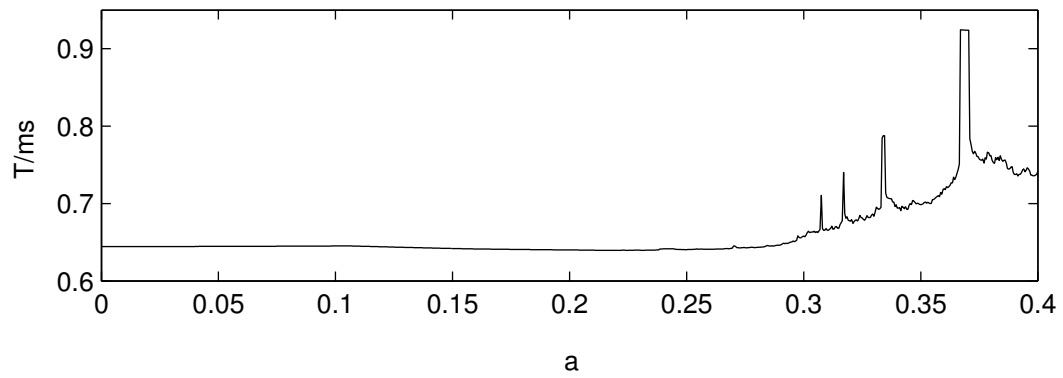
Die Interpretation dieser Zeit T kann dennoch schwierig sein. Im Falle des autonomen Diodenoszillators lässt sich dieses Problem jedoch sehr elegant lösen. Er hat nämlich bei den von mir verwendeten Parameterwerten die Eigenschaft, dass in der U_1 - U_2 -Projektion zu jedem Wert von a stets ein ‘Auge’ um den Ursprung offen bleibt. Im Bifurkationsdiagramm 2.2, für das alle Minima der U_1 -Komponente aufgetragen sind, zeigt sich diese Eigenschaft dadurch, dass für alle $a > a_0$ ein bestimmtes Intervall nahe $U_1 = 0$ frei bleibt. In diesem Schnitt sind also der Anteil des Trichters und der der gewöhnlichen Spirale deutlich getrennt. Diese Eigenschaft nutze ich und definiere die charakteristische mittlere Zyklusdauer des Oszillators als

$$T(a) := \langle t_{n+1} - t_n \rangle_n, \quad (2.2)$$

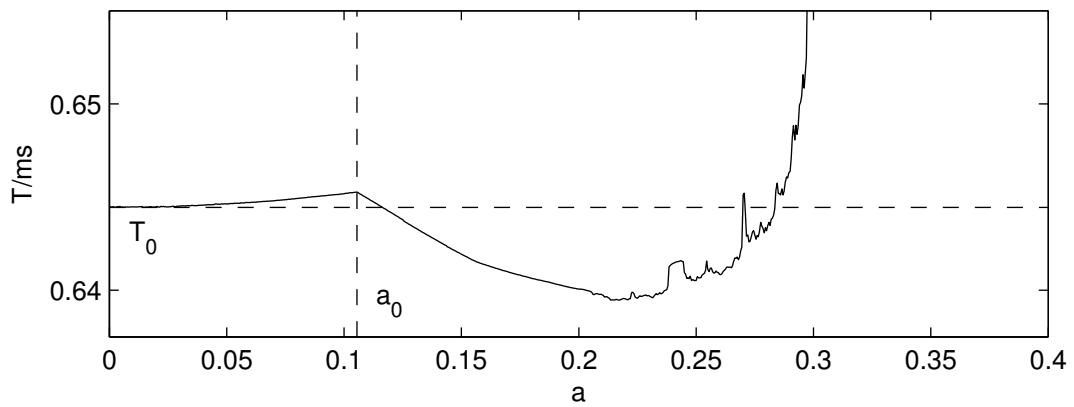
wobei t_n der Zeitpunkt des n -ten Durchstoßes der Poincaré-Ebene mit $U_2(t_n) = 0$ und $U_1(t_n) < 0$ ist. In Abb. 2.2 ist $T(a)$ aufgetragen. Bis zur Entstehung des Trichterattraktors bei a_F ist $T(a)$ weitgehend konstant. Der Anstieg für größere a ist damit zu erklären, dass zusätzlich Zeit benötigt wird für die



a)

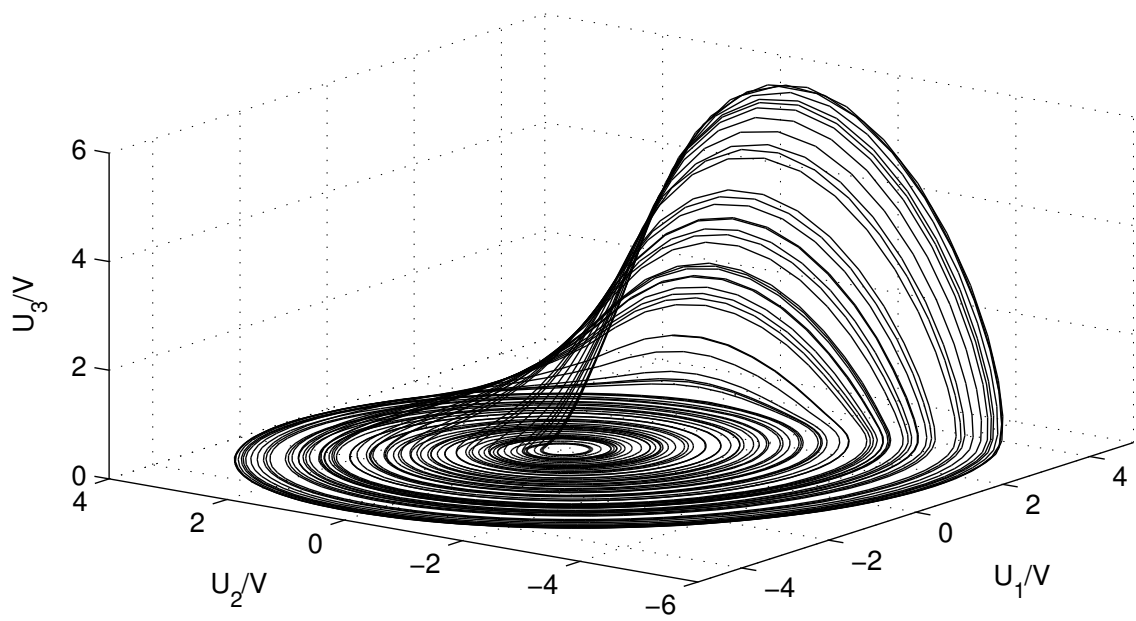


b)

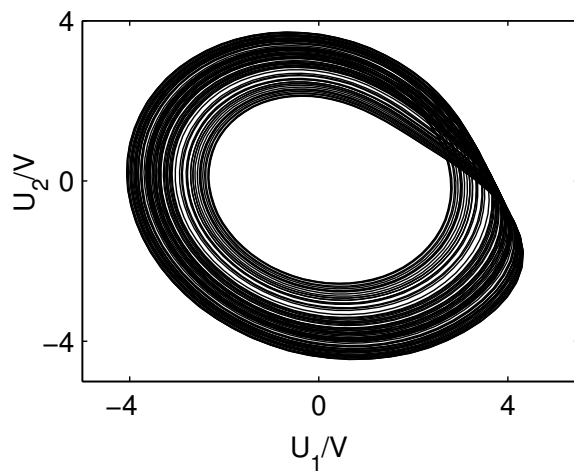


c)

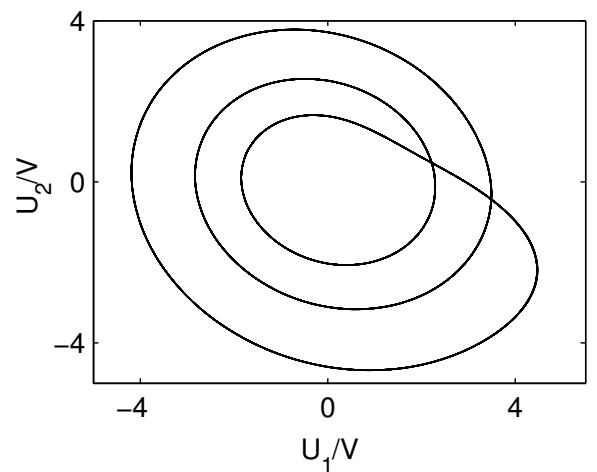
Abbildung 2.2: a) Bifurkationsdiagramm des autonomen Diodenoszillators. $u_n = -U_1(t_n)$ sind die Minima der Zeitreihe $U_1(t)$. b) Charakteristische Zeitskala des Schwingkreises. c) Ausschnitt aus b mit Standardperiodendauer $T_0 = 644.5\mu\text{s}$ und Bifunktionspunkt $a_0 = 0.1055$.



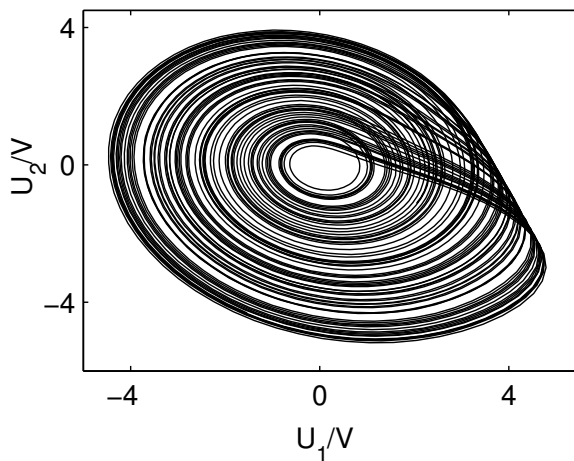
a)



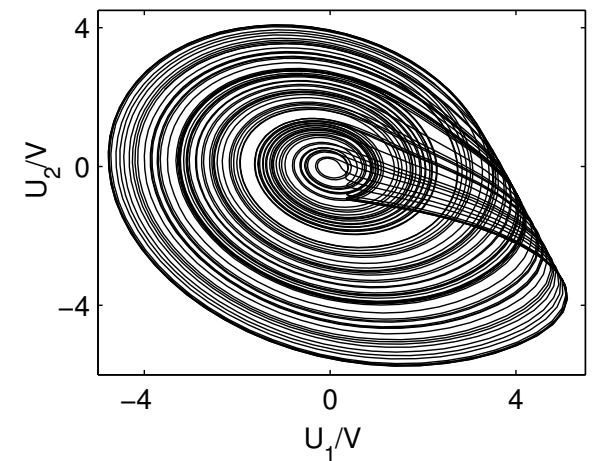
b)



c)



d)



e)

Abbildung 2.3: Beispiele von Trajektorien des Schwingkreises. a) 3D-Ansicht für $a = 0.29$, b) schmales Attraktorband für $a = 0.22$, c) Periode-3 Orbit bei $a = 0.24$, d)'starkes Chaos' für $a = 0.28$ und e) Trichterattraktor bei $a = 0.32$.

zweite Schleife, die den Trichterattraktor ausmacht. Mit wachsendem a steigt der Anteil an zusätzlichen Schleifen und damit die oben definierte Zyklusdauer. Periodische Fenster fallen in $T(a)$ besonders auf, da stabile periodische Orbits nur beim Durchqueren spezieller kontrahierender Phasenraumregionen entstehen, die im Chaos nur einen kleinen Bruchteil der Zeit in Anspruch nehmen. Das gilt auch in dem Bereich, wo $T(a)$ näherungsweise konstant ist, wie die Vergrößerung zeigt. In den Grafiken ist auch eine stetige Fortsetzung der Zyklusdauer für $a < a_0$ gezeigt, wo der Fixpunkt im Ursprung stabil ist. Die Definition (2.2) gilt auch hier. Allerdings muss für die Messung der Umlaufdauer an der stabilen Spirale eine externe Störung z.B. in Form kurzer Pulse auf den Oszillator gegeben und anschließend die Transiente ausgewertet werden. Dasselbe Ergebnis lässt sich auch aus den Eigenwerten der Matrix im vereinfachten System (2.1) gewinnen. Die geringfügige Variation der Spiralfrequenz des Fixpunktes ist derselbe Effekt wie die Änderung der Eigenfrequenz eines mechanischen Oszillators als Funktion der Dämpfung. Der Unterschied zu diesem klassischen Beispiel besteht darin, dass die Entartung bei $a = 0$ mit einer gedämpften Schwingung einhergeht. Bei a_0 beobachtet man stattdessen eine niedrigere Frequenz. Diese Frequenz des marginal stabilen Periode-1 Orbits eignet sich aber messtechnisch hervorragend zur präzisen Bestimmung des Zeitfaktors. Es ist nämlich

$$T_0 \equiv T(0) = T(a_0) \cdot \sqrt{1 - c^2}.$$

Der so erhaltene Wert stimmt auch hervorragend mit $T(0)$ aus der Messung mit dem Transientenverfahren überein. Die Kreisfrequenz von $\omega_0 = 9751 \text{ s}^{-1}$ weicht geringfügig vom Idealwert $1/RC = 10^4 \text{ s}^{-1}$ ab. Das liegt im Wesentlichen an der Toleranz (5%) der verwendeten Folienkondensatoren.

2.3 Numerische Modellierung

Die Freiheitsgrade U_1 , U_2 und U_3 des Schwingkreises sind in dem elektronischen Experiment sowohl messtechnisch als auch für Eingriffe mit externen Signalen problemlos zugänglich. Dennoch gibt es auch hier Größen, wie z.B. das Spektrum der Lyapunovexponenten, die nur unter erheblichem Aufwand in befriedigender Qualität aus den gemessenen Zeitreihen extrahiert werden können. Daher ist die Verwendung geeigneter numerischer Modelle zur Simulation des experimentellen Systems eine hervorragende Methode, um mehr Wissen über die beobachteten Phänomene zu erlangen. Darüber hinaus ist es interessant zu erfahren, wie gut die - teils mithilfe von Näherungen gefundenen - Bewegungsgleichungen tatsächlich die nichtlineare Dynamik des Experiments wiedergeben. Erfahrungsgemäß lassen sich insbesondere Bifurkationen quantitativ nur sehr ungenau nachbilden und manchmal gibt es sogar qualitative Unterschiede. Ein Beispiel dafür ist die numerische Modellierung des Diodenresonators durch die Toda-Differenzialgleichung.

In diesem Abschnitt zeige ich den Vergleich zwischen Experiment und Numerik für den von mir verwendeten Schwingkreis. Fasst man die Ergebnisse der vorigen Untersuchungen zusammen, so ergeben sich die vollen Bewegungsgleichungen für einen autonomen Diodenoszillator

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= \omega_0 (-cU_1 - U_2 - U_3) \\ \dot{U}_2 &= \omega_0 (U_1 + (a - c)U_2) \\ \dot{U}_3 &= \beta I_D(U_1, U_3) - \gamma U_3.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Diese Differenzialgleichungen beschreiben das System korrekt unter der Voraussetzung, dass ich ideale Bauteile verwende. Für eine numerische Integration werden der Zustandsvektor im Phasenraum sowie die Zeit auf dimensionslose Größen normiert:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} \cdot V^{-1} \\ t_{\text{num}} &= \omega_0 t_{\text{phys}}\end{aligned}$$

und ich verwende die Schreibweisen $\dot{U}_i \equiv \frac{d}{dt_{phys}} U_i(t_{phys})$ für physikalische Größen und $\dot{x}_i \equiv \frac{d}{dt_{num}} x_i(t_{num})$ für numerische Größen. Zur Vereinfachung schreibe ich immer t für die Zeit. Den Unterschied zwischen Numerik und Experiment erkennt man an der (fehlenden) Dimension. Die obige Umskalierung mit ω_0 gilt immer. Mit der Rampenfunktion $\Upsilon(x) := \frac{1}{2}(|x| + x)$ als Näherung für die Diodencharakteristik (siehe Anhang A.1) und den Werten der benutzten Bauteile lauten die numerischen Gleichungen für einen Schwingkreis

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -cx_1 - x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + (a - c)x_2 \\ \dot{x}_3 &= b\Upsilon(x_1 - x_0 + \frac{1}{2}x_3) - gx_3.\end{aligned}\tag{2.4}$$

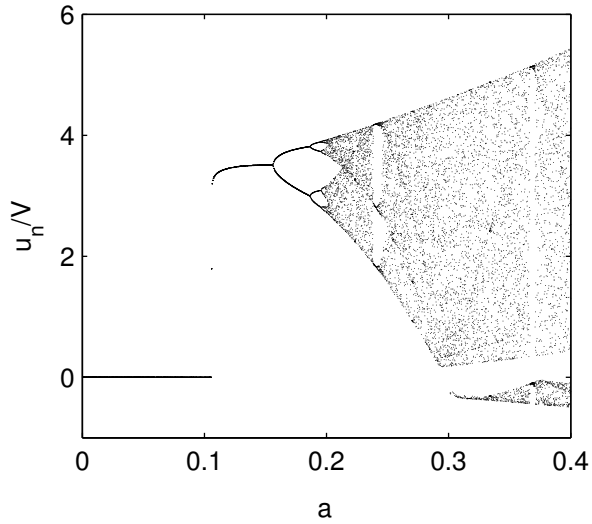
Verwendet man die Idealwerte der Bauteile und die an die Diodencharakteristik angepasste Rampenfunktion, so ergibt sich das Bifurkationsdiagramm in Abb. 2.4. Im direkten Vergleich mit dem experimentellen Diagramm fällt auf, dass viele Bifurkationspunkte zu kleineren Parameterwerten hin verschoben sind. Dieser Unterschied lässt sich nicht durch eine lineare Feinanpassung der vorhandenen Parameter beheben. Ein Blick auf die Umkehrabbildungen von Experiment und dieser Simulation, Abb. 2.4, zeigt die Ursache der Abweichungen. Die Krümmungen am Extremum der Abbildung sind unterschiedlich. Beide Abbildungen erinnern mehr oder weniger an die Zeltabbildung, welche für das Fehlen stabiler periodischer Orbits bekannt ist. Diese Eigenschaft ist für die Untersuchung chaotischer Synchronisation von Vorteil und ist daher ein weiteres Argument für diese Art von Schwingkreis. Ein Zuspitzen der Umkehrabbildung äußert sich in einer Verkürzung der Feigenbaumroute bis hin zum Verschwinden aller stabilen Orbits. Für eine Feinanpassung des numerischen Modells an die Dynamik des Experiments kann dieses Wissen über die eindimensionalen diskreten Abbildungen benutzt werden. Dazu muss aber zunächst geklärt sein, wie sich die Eigenschaften des kontinuierlichen Systems auf die der Umkehrabbildung übertragen. Im linearen Bereich lässt sich die Abbildung unabhängig von der Schnittbedingung dadurch konstruieren, dass sowohl die U_1 - als auch die U_2 -Komponente exponentiell mit der Rate $\lambda = (a - 2c)\omega_0$ wachsen. Nach jeder Periode der Dauer $T_0 = 2\pi/\omega_0$ wächst die Komponente in der Schnittebene, so dass

$$u_{n+1} = u_n e^{\lambda T_0} = u_n e^{2\pi(a-2c)}.$$

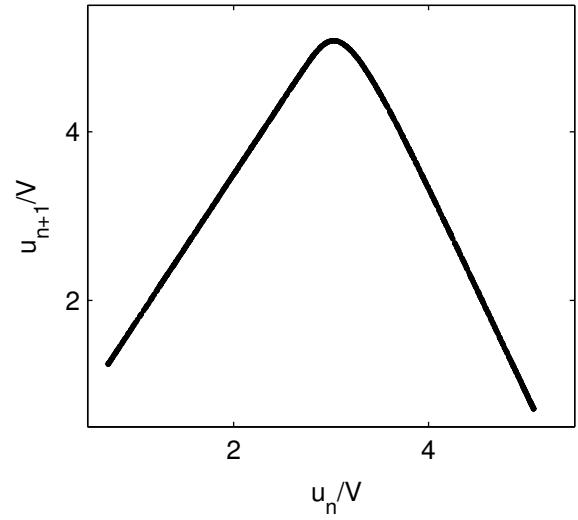
Damit ist die linke Hälfte der Umkehrabbildung erklärt. Für die rechte Hälfte lässt sich ohne Näherungen kein analytischer Ausdruck herleiten. Eine qualitative Untersuchung läuft aber darauf hinaus, dass die Eigenschaften der Kennlinie, wie sie in Abb. A.2 gezeigt ist, sich unmittelbar auf die Umkehrabbildung übertragen lassen. Dazu muss auch die Krümmung der Kurve berücksichtigt werden. Im numerischen Modell eignet sich am besten folgende Erweiterung der Rampenfunktion mit dem Krümmungsparameter $w \geq 0$

$$\Upsilon_w(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 0 \\ \sqrt{w^2 + (x + w)^2} - w & , \quad x > 0, \end{cases}$$

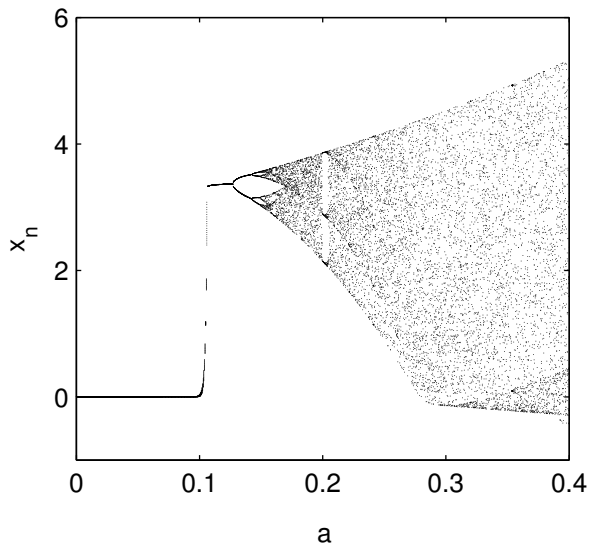
durch die eine Hyperbel für positive U_1 stetig differenzierbar an die Null für die linke Halbachse angefügt wird. Im Übrigen gilt $\Upsilon_0(x) = \Upsilon(x)$. Verwendet man für die Simulation mit den Gln. (2.4) die ‘weiche’ Rampenfunktion, so kann man den Einfluss der Krümmung w und der Steigung b auf die Umkehrabbildung studieren. In Abb. 2.5 sind solche Abbildungen für unterschiedliche Werte dieser Parameter gezeigt. Die linke Hälfte bleibt von der Variation unberührt, da nur die Nichtlinearität in der U_3 -Komponente variiert wird. Eine Änderung der Steigung b hat auch eine Änderung der Steigung der Abbildung zur Folge und wirkt sich kaum auf die Krümmung im Extremum aus. Eine Veränderung der Krümmung der Rampenfunktion wirkt sich im Wesentlichen nur auf die Krümmung in der Abbildung aus. Damit ist diese für ein präzises Modell unerlässlich. Um einen reibungslosen Wechselspiel zwischen Simulation und Experiment zu ermöglichen, müssen die Parameter des neuen Modells noch feinangepasst werden, sodass die



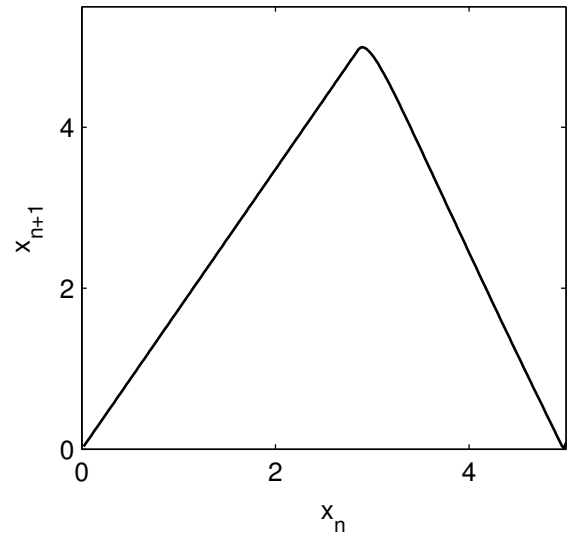
a)



b)

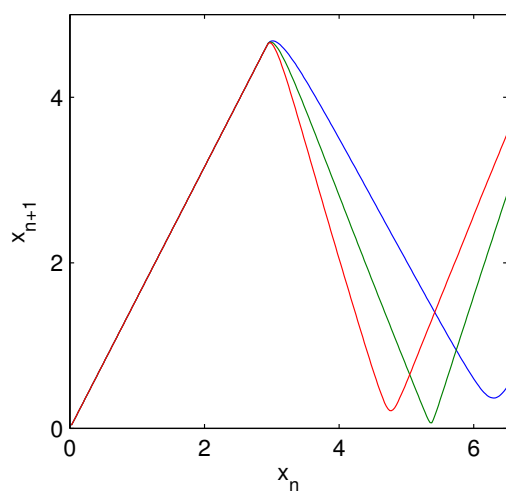


c)

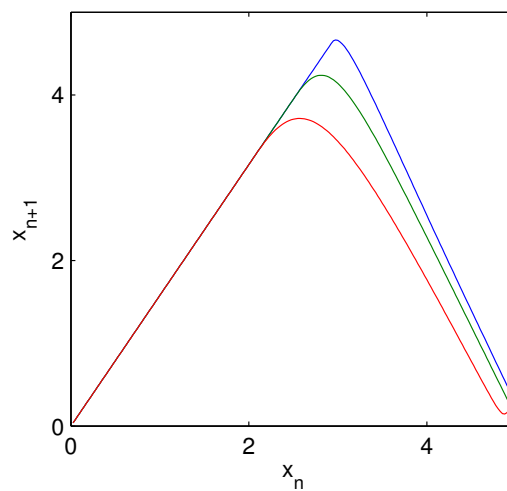


d)

Abbildung 2.4: a) Bifurkationsdiagramm aus dem Experiment. b) Umkehrabbildung der Minima von U_2 für $a = 0.28$. c) Bifurkationsdiagramm aus der Simulation mit den Gln. (2.4). d) Umkehrabbildung aus der Simulation mit $a = 0.28$.



a)



b)

Abbildung 2.5: Einfluss der Parameter der Nichtlinearität auf die Umkehrabbildung, die aus dem Poincaréschnitt mit $U_1(t_n) = 0$ und $0 < u_n = -U_2(t_n)$ gewonnen wurde. a) Änderung der Steigung b der Rampenfunktion, blau: $b = 5$, grün: $b = 6$, rot: $b = 7$. b) Änderung der Krümmung w der weichen Rampenfunktion, blau: $w = 0$, grün: $w = 0.5$, rot: $w = 1$.

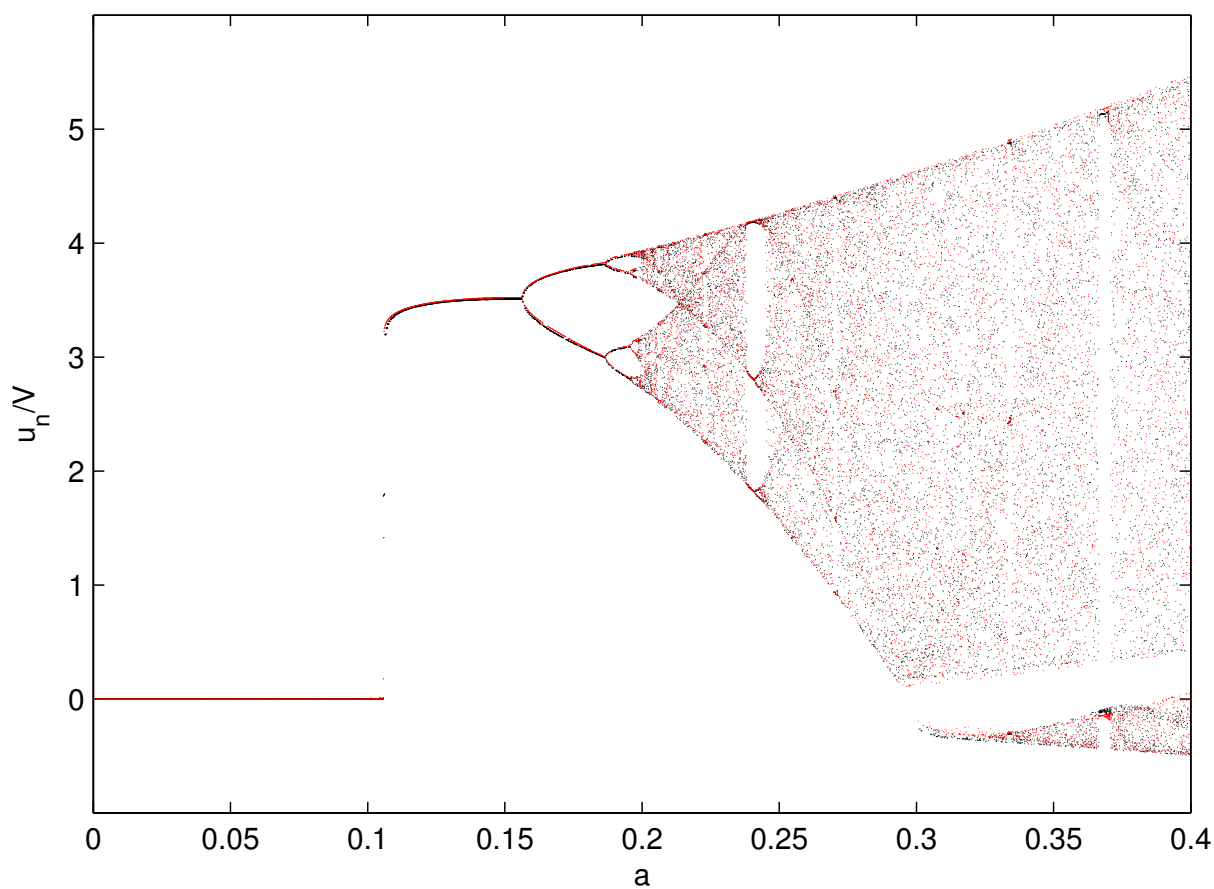


Abbildung 2.6: Bifurkationsdiagramm des angepassten numerischen Modells (rot) im direkten Vergleich mit dem Experiment (schwarz).

Abweichungen in der Dynamik möglichst gut kompensiert werden. Die üblichen Fehlerquellen sind dabei Fehler und nicht-ideales Verhalten der Bauteile, verbleibende Abweichungen des Modells wie die nicht beachteten kapazitiven Eigenschaften der Diode und zuletzt die Fehler durch die endliche Schrittweite der numerischen Integration. Die Anpassung führe ich mit einem von mir eigens dafür entwickelten Verfahren durch, bei dem zunächst für jeweils einen festen Wert von a aus den experimentellen Zeitreihen der Attraktor in U_1 , U_2 und U_3 gebildet wird. Der Attraktor aus der Simulation wird mit diesem anhand spezieller Maße (z.B. Extremwerte, Form der Umkehrabbildung) verglichen und die numerischen Parameter werden variiert, bis maximale Übereinstimmung hergestellt ist. Das Resultat ist in Abb. 2.6 anhand eines direkten Vergleichs der Bifurkationsdiagramme gezeigt. Diese sind wie beabsichtigt weitgehend identisch. Die verbleibenden Unterschiede können mit den vernachlässigten Freiheitsgraden der Diode und dem Erreichen der Spannungsbegrenzung am Operationsverstärker B erklärt werden.

Mithilfe des angepassten numerischen Modells lässt sich das Lyapunovspektrum des Schwingkreises berechnen. Dazu werden die Bewegungsgleichungen zusammen mit dem freien LTS (vgl. Gl. (1.4)) integriert, als ob man zwei identische ungekoppelte Systeme hätte. Den größten Exponenten λ_{\max} erhält man durch einfache Vorwärtsintegration, denn dabei richtet sich der lineare Abstandsvektor für typische Startbedingungen nach endlicher Zeit zur instabilsten Mode aus

$$\lambda_{\max} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left(\frac{|\mathbf{v}(t)|}{|\mathbf{v}(0)|} \right).$$

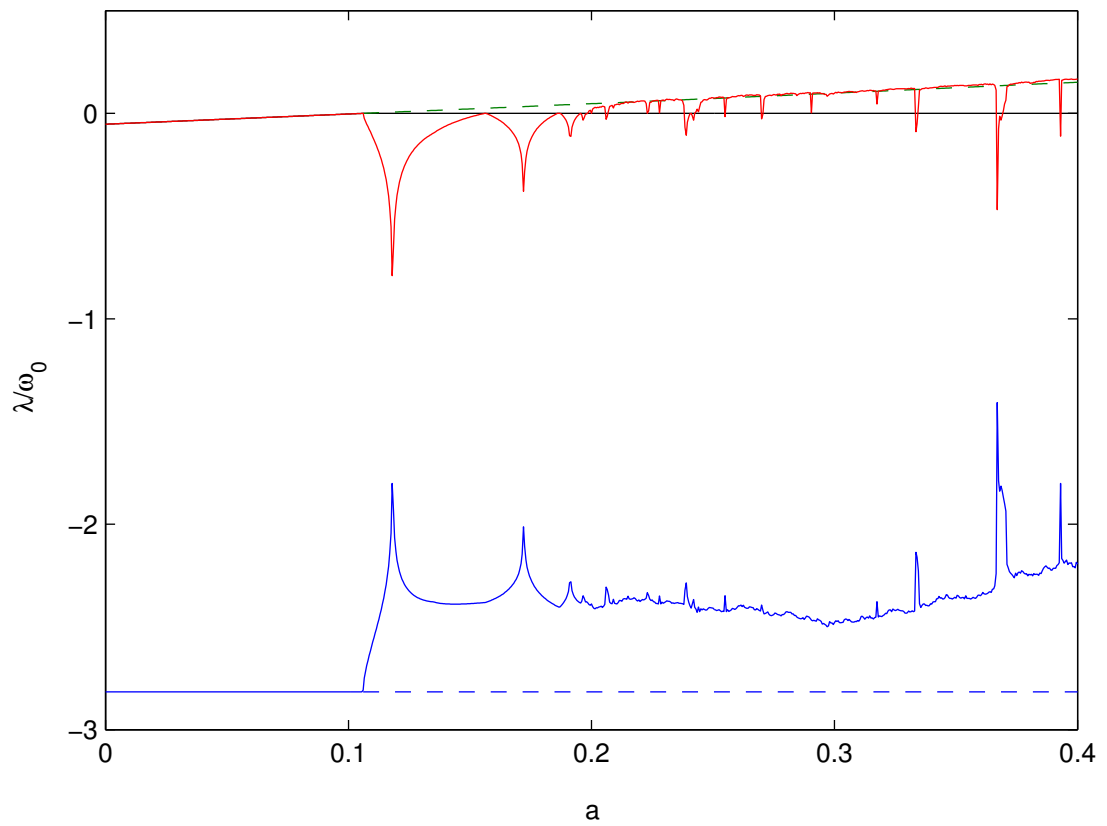
Die anderen beiden Exponenten erhalte ich ebenfalls aus dem LTS mit unterschiedlichen anderen Techniken, darunter auch Rückwärtsintegration. Abb. 2.7 zeigt das somit gewonnene Lyapunovspektrum sowie die Stabilitätsexponenten des trivialen Fixpunktes.

2.4 Zwei identische Schwingkreise

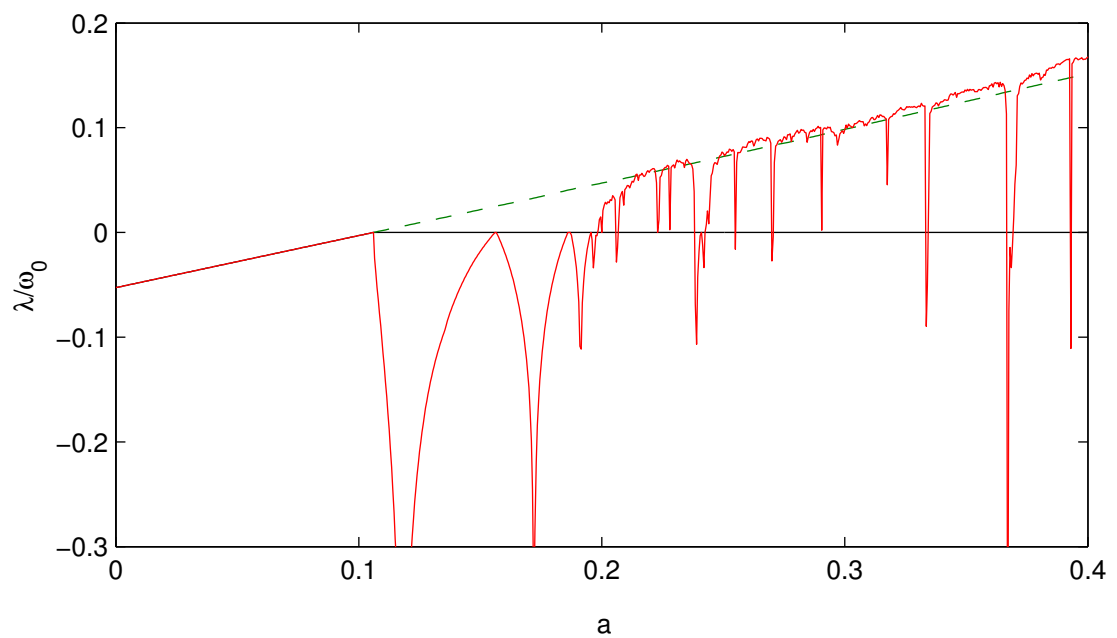
Zur Untersuchung von Synchronisationsphänomenen konstruiere ich einen zweiten autonomen Diodenoszillator, der dem ersten möglichst identisch ist. Dazu werden die Widerstände und insbesondere die Kapazitäten sorgfältig ausgewählt, so dass immer die entsprechenden Bauteile jeweils paarweise denselben Wert haben. Die relativen Abweichungen lassen sich durch die Auswahl teils auf bis zu 10^{-4} reduzieren. Besondere Aufmerksamkeit widme ich dabei der Feinabstimmung der Oszillationsfrequenzen. Es hat sich nämlich herausgestellt, dass sich ein Frequenzunterschied am deutlichsten als Synchronisationsfehler bemerkbar macht. Bei Phasenoszillatoren, wie sie von Pikovsky et al. [7] ausführlich diskutiert wurden, beobachtet man im Allgemeinen eine Phasendifferenz bei den gekoppelten Oszillatoren. Das lässt sich anschaulich erklären: Der 'langsamere' Oszillator habe die Frequenz f_1 und der 'schnellere' die Frequenz $f_2 = f_1 + \Delta f$. Infolge der Kopplung rasten beide Oszillatoren auf einer gemeinsamen Frequenz ein, die zwischen f_1 und f_2 liegt. Tendenziell eilt dabei immer noch der schnellere Oszillator vor und der langsamere nach. Dadurch entsteht die Phasendifferenz. Für chaotische Systeme kann die Phasenverschiebung dabei zu einer Zeitverschiebung werden, so dass das Phänomen der verzögerten Synchronisation auftritt [17]. Eigene Analysen zu diesem Punkt finden sich in Anhang B.1.

2.5 Digitale Verzögerungsleitungen

Zur Verzögerung der Signale benutze ich die in der Arbeitsgruppe entwickelten digitalen Verzögerungsleitungen. Diese digitalisieren das Eingangssignal mit 8 Bit Auflösung. Das geschieht mit einer externen Taktfrequenz f_c , die maximal 900kHz beträgt. Das digitale Signal wird in einem FIFO zwischengespeichert, der maximal 1024 Stellen fasst. Die Verzögerungszeit wird durch die Anzahl der Stellen $N \leq 1024$ festgelegt, die der FIFO zwischenspeichert. Das Einstellen geschieht über ein digitales Zählwerk auf einer Kontrollschaltung, die dem FIFO das Taktsignal für Schreib- und Lesevorgang genau um N Taktzyklen



a)



b)

Abbildung 2.7: Lyapunovspektrum des angepassten numerischen Modells. a) Durchgezogene Kurven: Lyapunovexponenten, gestrichelte Kurven: Exponenten des Fixpunktes b) Ausschnittsvergrößerung aus a.

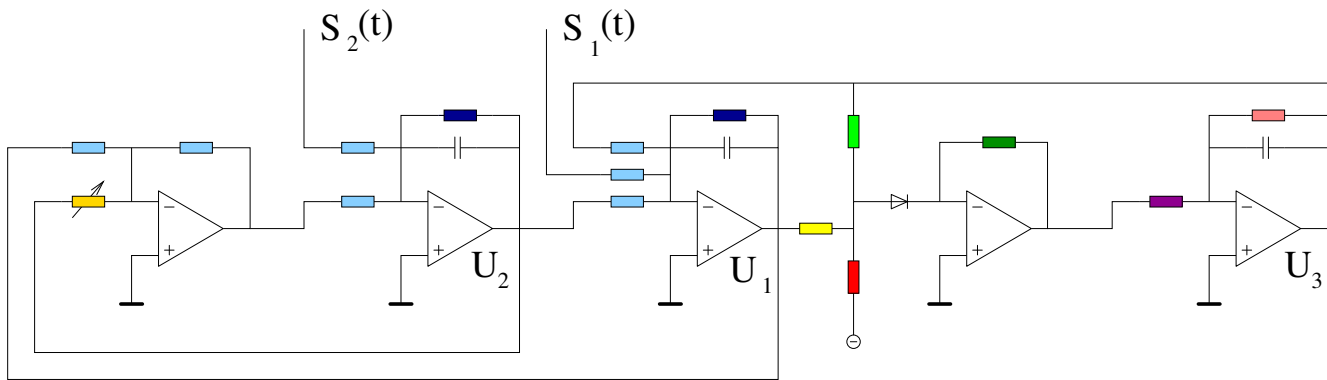


Abbildung 2.8: Schwingkreis mit Einspeisung der Kopplungskräfte. Bauteile wie in Abb. 2.1. Für instantane Kopplung ist z.B. $S = K(x - y)$.

versetzt zuweist. Das verzögerte digitale Signal wird von einem DA-Wandler wieder in ein analoges umgeformt und anschließend mit einem Tiefpass zweiter Ordnung bei einer Grenzfrequenz von 20kHz gefiltert. Die Bandbreite zwischen dieser Frequenz und der Taktfrequenz nutze ich mit einem eigens dafür entwickelten Rauschgenerator, um mithilfe des Dithering-Effekts die Auflösung der Verzögerungsleitungen effektiv auf bis zu 11 Bit zu vergrößern. Die minimale Verzögerungszeit beträgt etwa $15\mu\text{s} = \tau_0$. Das ist diejenige Zeit, die ohne Zwischenspeichern des Signals nur durch die AD-DA-Wandlung und die Vor- und Nachbereitung in den analogen Filtern entsteht. Ansonsten ist $\tau = \tau_0 + N/f_c$ und damit beträgt die maximale Verzögerungszeit $\tau_0 + 1024/f_c$. Die Taktfrequenz kann zwar beliebig niedrig gewählt werden, aber im Sinne des Samplingtheorems ist ihr eine Untergrenze gesetzt, die von dem zwischenspeichernden Signal abhängt. Für die Diodenoszillatoren haben die verzögerten Signale je nach Anwendung ab einer Taktfrequenz von etwa 40kHz eine hinreichend gute Qualität. Damit beträgt die maximale Verzögerungszeit 25.6ms . Das entspricht 40 typischen Oszillationszyklen der Schwingkreise.

3 Invasive Kopplung

Die Beschreibung durch eine instantane Kopplung wie in Schema (1.7) ist ein sinnvolles Konzept, solange die Signallaufzeiten im Kopplungsmechanismus sehr kurz sind gegen alle typischen Zeitskalen der Systeme. Bei meinem Versuchsaufbau beträgt die Laufzeit innerhalb der Steckplatinen zwischen 0.3 und 0.5ns. Beim Durchlaufen von Operationsverstärker- und Multipliziererbausteinen können je nach Signal Verzögerungen von bis zu 200ns entstehen. Für die Diodenoszillatoren spielen diese kurzen Zeiten keine Rolle. Eine weite räumliche Trennung wird daher mithilfe der digitalen Verzögerungsleitungen imitiert.

3.1 Eigenschaften invasiver zeitverzögerter Kopplung

Wie im ersten Kapitel gezeigt, existiert im Schema (1.16)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{K} \cdot (\mathbf{y}_\tau - \mathbf{x}) \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{f}(\mathbf{y}) + \mathbf{K} \cdot (\mathbf{x}_\tau - \mathbf{y})\end{aligned}$$

vollständige Synchronisation, wobei aber die Kopplungskräfte im Allgemeinen nicht verschwinden. Man kann das damit erklären, dass infolge des Kopplungsterms jedes System versucht, auf die Vergangenheit des Gegenübers zu synchronisieren. Wenn das z.B. System \mathbf{x} gelingt, dann verschwindet für dieses zwar die Kopplungskraft und man hätte zeitversetzte Synchronisation. Dann kann System \mathbf{y} aber nicht parallel dazu auf die Vergangenheit von \mathbf{x} synchronisieren. Der einzige Kompromiss für diese paradoxe Situation liegt in einem gegen Vertauschung der Systeme symmetrischen Zustand, bei dem die Kopplungskräfte im Allgemeinen nicht verschwinden. Die vollständige Synchronisation ist ein solcher Zustand. Da für jedes System die zeitverzögerten Komponenten des jeweils anderen Systems bei vollständiger Synchronisation nicht von den eigenen unterscheidbar sind, entsteht eine Dynamik wie bei einem einzelnen System mit Selbstrückkopplung, was man an der longitudinalen Koordinate in Gln. (1.17) gut einsehen kann. Dieses Phänomen bezeichne ich als *virtuelle Selbstrückkopplung*. Für die folgenden Untersuchungen ist es daher sinnvoll, eine Fallunterscheidung möglicher dynamischer Zustände zu machen, die sich infolge der virtuellen Selbstrückkopplung einstellen können. Ich beschränke mich dabei auf die Attraktoren dissipativer Systeme. Auch Transienten sollen an dieser Stelle nicht diskutiert werden. Ich betrachte stattdessen folgende Fälle:

- Fixpunkte \mathbf{x}_* mit $\mathbf{f}(\mathbf{x}_*) = \mathbf{0}$. Diese sind die Trivillösungen für vollständige Synchronisation mit $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{x}_*$. Damit ist auch $\mathbf{x}_\tau = \mathbf{y}_\tau \equiv \mathbf{x}_*$ und die Kopplung ist für den gemeinsamen Fixpunkt nicht-invasiv. Für synchrone Fixpunkte gilt außerdem, dass sie sich aufgrund der Kopplung nicht verschieben. Sie können auch nicht durch Bifurkationen verschwinden oder neu entstehen. Die zeitverzögerte Kopplung kann nur die Stabilität der bestehenden Fixpunkte beeinflussen. Außerhalb der Synchronisationsebene gelten diese Einschränkungen nicht.
- Periodische Orbits $\xi(t)$ mit $\xi(t + T_p) = \xi(t)$. Ist ξ ein Orbit des einzelnen Systems, so dass $\dot{\xi}(t) = \mathbf{f}(\xi(t))$, dann bezeichne ich ihn als einen *systemeigenen* Orbit. Für systemeigene Orbits ist die Kopplung nicht-invasiv, falls die Verzögerungszeit ein Vielfaches der Periodendauer ist. Der Fall $\tau = 0$ ergibt sich als Spezialfall dieser Regel, weil der nicht-invasive Charakter der Kopplung dann für alle Attraktoren gegeben ist. Die Bedingung $\tau = nT_p$ ist vollkommen analog zum Fall der zeitverzögerten Rückkopplungskontrolle. Diese ergibt sich aus dem obigen Schema automatisch bei vollständiger Synchronisation, wie aus Gln. (1.17) ersichtlich wird. Damit stellt sich auch die Frage, ob eine solche gegenseitige zeitverzögerte (Rück-)Kopplungskontrolle von periodischen Orbits möglich ist und welchen Einschränkungen sie unterliegt. Des Weiteren kann es im

Schema (1.16) auch periodische Orbits geben, für die die Verzögerungszeit von der Periodendauer abweicht. Diese Orbits kann man als *delay-induzierte* Orbits bezeichnen, da sie in einem einzelnen System nicht existieren. Teilweise können solche Orbits aus systemeigenen Orbits durch eine stetige Verformung hervorgebracht werden, wenn ein Kopplungsparameter variiert wird. Dies ist der übliche Befund, wenn man z.B. die Kopplungsstärke k ausgehend von Null vergrößert, oder wenn man τ ausgehend von nT_p verändert. Im Allgemeinen ist aber damit zu rechnen, dass in dem invasiven Kopplungsschema durch Bifurkationen neue delay-induzierte periodische Orbits entstehen.

- Aperiodische Trajektorien $\zeta(t)$ mit $\zeta(t + t') \neq \zeta(t)$ für alle t' . Dazu gehören quasiperiodische oder chaotische Trajektorien. Im Gegensatz zu Fixpunkten oder periodischen Orbits werden solche systemeigenen Trajektorien bei invasiver Kopplung immer qualitativ verändert. Aperiodische Trajektorien im vollständig synchronen Zustand sind immer delay-induziert. Sie lassen sich auch nicht wie periodische Orbits durch eine stetige Verformung ineinander überführen. Man kann sich diese Eigenschaft damit klar machen, dass sich die Kopplungsparameter in dem Gesamtsystem prinzipiell nicht von jedem anderen Systemparameter unterscheiden. Ein Parameterintervall, auf dem aperiodische Lösungen zu finden sind, ist im Allgemeinen dicht durchsetzt von periodischen Fenstern, und damit unterscheiden sich alle seltsamen Attraktoren auf diesem Intervall.

Die bisherigen Überlegungen betreffen nur die Existenz von bestimmten Phasenraumobjekten. Ob es sich dabei um einen Attraktor oder einen Repellor handelt, ist eine wichtige Fragestellung, denn damit kann erst geklärt werden, welche Dynamik man ohne zusätzliche Eingriffe tatsächlich beobachten kann. Auf den ersten Blick ist es längst nicht klar, wie im Kopplungsschema (1.16) eine Stabilisierung des synchronen Zustandes erfolgen kann. Um einen Zugang zum Synchronisationsverhalten und der sich einstellenden synchronen Dynamik zu bekommen, implementiere ich das Kopplungsschema (1.16) im Experiment mithilfe der digitalen Verzögerungsleitungen und den im letzten Kapitel vorgestellten Kopplungsschaltungen. Die entsprechenden numerischen Gleichungen für den verwendeten Aufbau lauten

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -cx_1 - x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + (a - c)x_2 + k(y_{2,\tau} - x_2) \\ \dot{x}_3 &= b\Upsilon_w(x_1 - x_0 + \frac{1}{2}x_3) - gx_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= -cy_1 - y_2 - y_3 \\ \dot{y}_2 &= y_1 + (a - c)y_2 + k(x_{2,\tau} - y_2) \\ \dot{y}_3 &= b\Upsilon_w(y_1 - x_0 + \frac{1}{2}y_3) - gy_3,\end{aligned}$$

d.h., die Kopplung $\mathbf{K} = k\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^\top$ ist ein Projektor auf die zweite Komponente. Bei festen Systemparametern mit $a = 0.265$ variiere ich die Kopplungsparameter und nehme dazu $x_2(t)$ und $y_2(t)$ auf. Zur Auswertung wird die Differenz der Signale gebildet, um auf vollständige Synchronisation zu überprüfen. Ist $|y_2(t) - x_2(t)| = 2|\nu_2(t)|$ mindestens zu 95% der Zeit kleiner als ein vorgegebener Schwellenwert, so wird die Dynamik als synchron gewertet. Nähert sich die Trajektorie der Synchronisationshyperebene zu mehr als 40%, aber weniger als 95% der Zeit, so wird die Dynamik als intermittierend gewertet. Sind die synchronen Abschnitte dabei chaotisch, so handelt es sich wahrscheinlich um on-off-Intermittenz. Hält sich der synchrone Zustand weniger als 40% der Zeit, so wird die Dynamik als nicht synchron gewertet. Die vollständig synchronen Trajektorien werden anschließend mit einem von mir dafür entwickelten Verfahren automatisch auf Periodizität untersucht. In der Praxis kann der verwendete Algorithmus zuverlässig zwischen konstanten, periodischen und aperiodischen Signalen unterscheiden. Eine Erweiterung zur Unterscheidung zwischen Quasiperiodizität und Chaos ist auch möglich, aber etwas weniger präzise als die Unterscheidung zwischen den anderen Signalen. Die Ergebnisse sind in Abb. 3.1 zusammengefasst. Generell fällt hierbei auf, dass die vollständige Synchronisation eher die Ausnahme als die Regel darstellt. Für $\tau = 0$ gibt es vollständige chaotische Synchronisation, sobald $k > k_c$ ist. Diese Eigenschaft

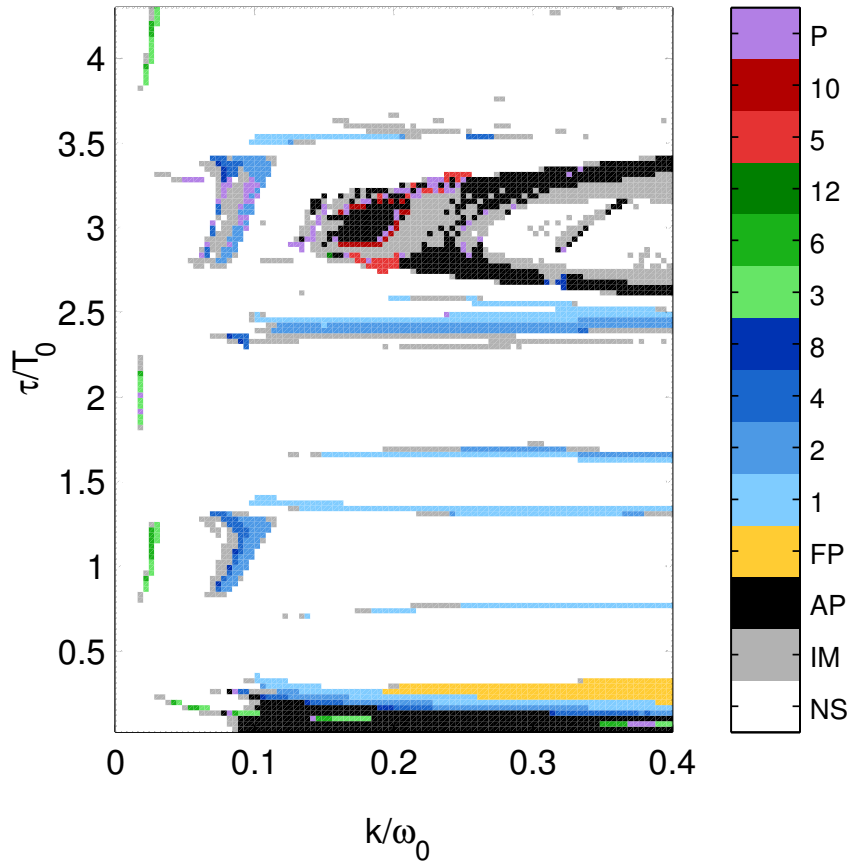


Abbildung 3.1: Dynamische Zustände bei Variation der Kopplungsparameter k und τ im Experiment für das Kopplungsschema (1.16) bei Kopplung in der zweiten Komponente. NS: Nicht vollständig synchron, IM: intermittent, AP: aperiodisch, FP: Fixpunkt, Nummern: Periodische Orbits der Reihen $1 \cdot 2^n$, $3 \cdot 2^n$ und $5 \cdot 2^n$, P: Orbits anderer Periode.

entspricht der Erwartung. Selbst für $\tau > 0$ bleibt der Bereich vollständiger Synchronisation erhalten, aber mit unterschiedlichen dynamischen Zuständen. Liegt die Verzögerungszeit in der Nähe eines Vielfachen der Zyklusdauer, hier $\tau = 1T_0$, $\tau = 2T_0$ und $\tau = 4T_0$, gibt es keine vollständige Synchronisation außer für schmale Intervalle in k . Etwas weiter neben den vollen Perioden existieren schmale Bänder vollständiger periodischer Synchronisation. Am auffälligsten ist der Boomerang-förmige Stabilitätsbereich mit hauptsächlich aperiodischer Synchronisation nahe $\tau = 3T_0$. Im Folgenden sollen diese Muster der vollständigen Synchronisation mit analytischen Methoden erklärt werden.

3.2 Dynamik und Stabilität für kleine τ

In longitudinalen und transversalen Koordinaten lässt sich die Analyse am besten durchführen. Es ergeben sich die Gln. (1.17)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{f}(\mathbf{u}) + \mathbf{K} \cdot (\mathbf{u}_\tau - \mathbf{u}) \\ \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{Df}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} - \mathbf{K} \cdot (\mathbf{v}_\tau + \mathbf{v}).\end{aligned}$$

Für kleine τ kann man linear extrapolieren, so dass

$$\mathbf{u}_\tau = \mathbf{u} - \tau \dot{\mathbf{u}}$$

und analog für \mathbf{v} . Dann ändern sich die Gleichungen zu

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}} &= (\mathbf{1} + \mathbf{K}\tau)^{-1} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{u}) \\ \dot{\mathbf{v}} &= (\mathbf{1} - \mathbf{K}\tau)^{-1} \cdot (\mathbf{Df}(\mathbf{u}) - 2\mathbf{K}) \cdot \mathbf{v} .\end{aligned}$$

Ist $\mathbf{K} = k\mathbf{1}$ eine diagonale Kopplung, dann bewirkt diese longitudinal eine Änderung der Zeitskala der ansonsten unveränderten Dynamik. Das entspricht der Situation wie im Beispiel der Gln. (B.1). Für positive k wird das System gebremst, wobei in der transversalen Richtung der umgekehrte Effekt stattfindet. Ist also das Produkt $k\tau$ nahe Eins und ist k hinreichend groß, so dass im zweiten Term die Dämpfung überwiegt, so wird das Abklingen beschleunigt und somit die Stabilität sogar gegenüber $\tau = 0$ verbessert. Beim Überschreiten von $k\tau = 1$ verschlechtert sich aber die Stabilität wieder und die Synchronisation bricht auf. Ein analoges Ergebnis wird für den Fall antizipierender Synchronisation dokumentiert [66]. Für die Änderung der Dynamik innerhalb des Stabilitätsgebietes ist die konkrete Form der verwendeten Kopplung bestimmend. Dadurch dass im Experiment nur die zweite Komponente für die Kopplung benutzt wurde, betrifft die Reskalierung der Zeit nur diese. Damit ist

$$\dot{u}_2 = (1 + k\tau)^{-1}(u_1 + (a - c)u_2) .$$

Das Bifurkationsszenario ist vergleichbar mit dem in Abb. 2.2, das man erhält, wenn nur a variiert wird. Für festes k wird also beim Vergrößern der Verzögerungszeit dieser Parameter effektiv verkleinert, was schließlich der inversen Feigenbaumroute bis zum Fixpunkt entspricht.

3.3 Stabilität des Fixpunktes $\mathbf{x}_* = \mathbf{0}$

Der autonome Diodenoszillator besitzt einen Fixpunkt im Koordinatenursprung. Über die sehr eingeschränkte Näherung des vorherigen Abschnitts hinaus sind dessen Stabilitätseigenschaften leicht analytisch zugänglich, weil es sich um ein zeitunabhängiges Problem handelt. Dafür kann das transversale lineare Tangentialsystem aus (1.17) übernommen werden und es gilt sogar exakt für die nähere Umgebung dieses Punktes. Auch für die longitudinale Koordinate kann daher die Linearisierung geschrieben werden und man erhält

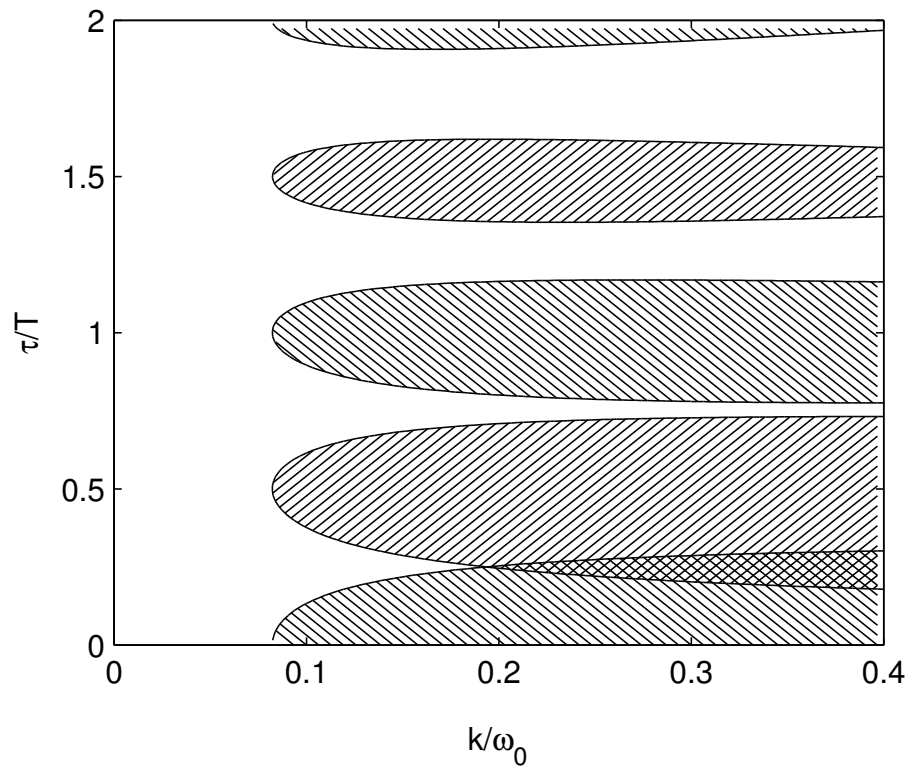
$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{Df}(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{u} + \mathbf{K} \cdot (\mathbf{u}_\tau - \mathbf{u}) \\ \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{Df}(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{v} - \mathbf{K} \cdot (\mathbf{v}_\tau + \mathbf{v}) .\end{aligned}$$

Die Jakobimatrix $\mathbf{Df}(\mathbf{0})$ bildet den gemeinsamen Antrieb für beide Koordinaten. Hier zeigt sich ein weiterer Vorteil der LT-Transformation gegenüber den ursprünglichen Koordinaten \mathbf{x} und \mathbf{y} . In \mathbf{u} und \mathbf{v} sind die beiden linearen Systeme vollständig entkoppelt. Der Antrieb schreibt sich explizit

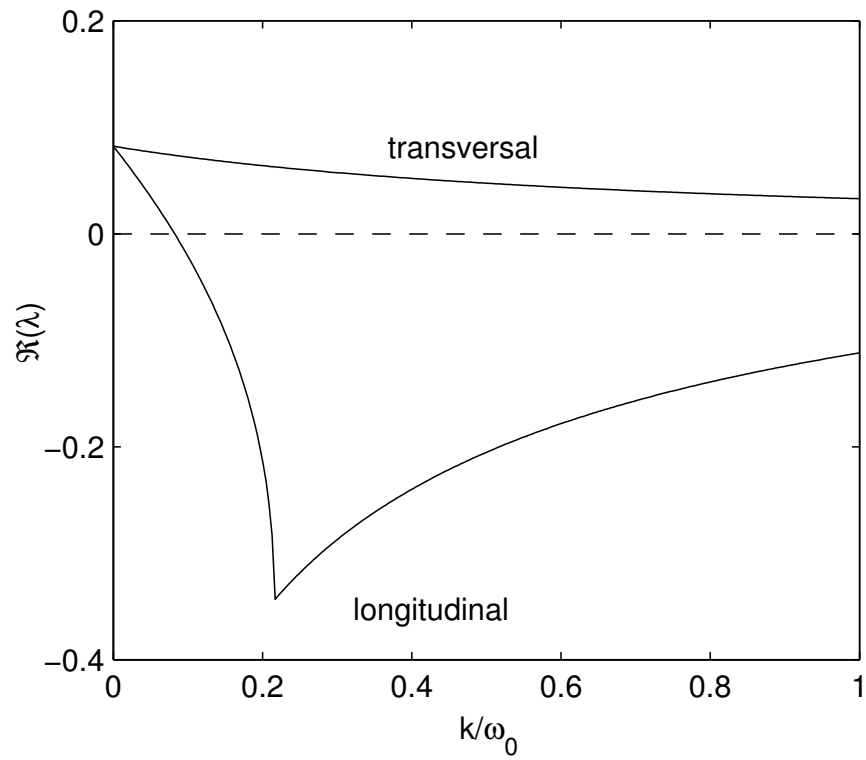
$$\mathbf{Df}(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} -c & -1 & -1 \\ 1 & (a - c) & 0 \\ 0 & 0 & -g \end{pmatrix} .$$

Die dritte Komponente kann für die Diskussion vernachlässigt werden, da sie bei den verwendeten Kopplungsparametern stets mit der Rate $-g$ relaxiert. Nur der Unterraum der ersten beiden Komponenten bleibt für die Stabilität relevant. Als weitere Näherung untersuche ich die komplexe Normalform mit den Substitutionen $z = u_1 + iu_2$, $w = v_1 + iv_2$, $\lambda_0 = (a/2 - c) + i$ und $\kappa = k/2$

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \lambda_0 z + \kappa(z_\tau - z) \\ \dot{w} &= \lambda_0 w - \kappa(w_\tau + w) .\end{aligned} \tag{3.1}$$



a)



b)

Abbildung 3.2: a) Transversale (\\) und longitudinale (//) Stabilitätsgebiete des Fixpunktes. b) Realteil des größten transversalen und longitudinalen Exponenten für $\tau = T/2$.

Die zugehörigen Eigenwerte genügen den transzendenten Gleichungen

$$\begin{aligned}\lambda_{\parallel} &= \lambda_0 + \kappa(e^{-\lambda_{\parallel}\tau} - 1) \\ \lambda_{\perp} &= \lambda_0 + \kappa(-e^{-\lambda_{\perp}\tau} - 1).\end{aligned}\tag{3.2}$$

Der Fixpunkt ist stabil, wenn alle $\Re(\lambda) < 0$ sind. Abb. 3.2a zeigt die Stabilitätsgebiete als Funktion von k und τ . Es gibt hierbei nur einen schmalen Überlapp bei etwa $\tau = T/4$. Dieses Gebiet stimmt sehr gut mit dem experimentell gefundenen Stabilitätsgebiet überein. Das bestätigt auch die Gültigkeit der beiden Näherungsschritte. Für eine Verzögerungszeit von $\tau = T/2$ ist in Abb. 3.2b der Realteil des größten Exponenten jeder Koordinate dargestellt. In longitudinaler Richtung erkennt man das Profil, das aus der zeitverzögerten Rückkopplungskontrolle eines periodischen Orbits mit π -Torsion bekannt ist. In transversaler Richtung hat aber der zeitverzögerte Term das umgekehrte Vorzeichen, so dass er die Wirkung des instantanen Terms nicht unterstützt, sondern sie aufhebt. Der Fall ist analog zur Kontrolle torsionsfreier Orbits, die nicht mit der herkömmlichen Methode stabilisiert werden können. Der Überlapp der Stabilitätsgebiete kommt von einer $\pi/2$ -Phasendrehung in der Umgebung des Fixpunktes, so dass die Gln. (3.2) ein Paar komplex konjugierter Eigenwerte erzeugen. Es lässt sich zeigen, dass es abhängig von der Instabilität $\Re(\lambda_0)$ des Fixpunktes eine Bedingung für diesen Überlapp gibt. Diese lautet [77]

$$\begin{aligned}\Re(\lambda_0)\tau &\leq g_s = 1 - \sin(\theta) \\ \text{mit } \theta &= \cos(\theta).\end{aligned}\tag{3.3}$$

Wie typisch für Differenzialgleichungen mit zeitverzögerten Argumenten ergibt sich der Zahlenwert von $g_s = 0.3264\dots$ aus einer transzendenten Gleichung. Mit der Bedingung (3.3) lässt sich verstehen, wie so in Abb. 3.2a für größere τ keine weiteren Überlappbereiche mehr vorkommen. Reduziert man den Parameter a im Experiment, so kann man auch diese Gebiete bei $\tau = (n \pm \frac{1}{4})T$ finden.

3.4 Stabilität synchroner periodischer Orbits

Bei den Parameterwerten, die der Messung für Abb. 3.1 zugrunde lagen, besitzt jeder Oszillator mindestens einen systemeigenen periodischen Orbit der Periode $T_p \approx T_0, 2T_0, 3T_0$ und $4T_0$. Diese existieren bei den gekoppelten Systemen zwar prinzipiell als synchrone Lösung. Man erkennt aber in Abb. 3.1 deutlich, dass in den entsprechenden Bereichen in k und τ keine vollständige Synchronisation möglich ist. Einen zu kleinen Einzugsbereich der zu stabilisierenden Orbits habe ich dadurch ausgeschlossen, dass vor jeder Messung mithilfe einer zusätzlichen instantanen Kopplung die vollständige Synchronisation erzwungen wurde. Während dieser Phase vor der eigentlichen Messung beobachtet man tatsächlich die Stabilisierung der Orbits im Sinne der zeitverzögerten Rückkopplungskontrolle. Wird dann die zusätzliche Kopplung ausgeschaltet, desynchronisieren die Systeme. Damit ist klar, dass die synchronen periodischen Orbits transversal instabil sind. Eine Erklärung für dieses Phänomen verläuft vollkommen analog zu der Argumentation für den instabilen Fixpunkt. Im Sinne einer Störungsrechnung schreibt man die Abweichungen vom synchronen periodischen Orbit $\xi(t)$ in transversalen und longitudinalen Koordinaten

$$\begin{aligned}\dot{\delta \mathbf{u}} &= \mathbf{Df}(\xi(t))\delta \mathbf{u} + \mathbf{K}(+\delta \mathbf{u}_{\tau} - \delta \mathbf{u}) \\ \dot{\delta \mathbf{v}} &= \mathbf{Df}(\xi(t))\delta \mathbf{v} + \mathbf{K}(-\delta \mathbf{v}_{\tau} - \delta \mathbf{v}),\end{aligned}\tag{3.4}$$

wobei $\tau = T_p$ der Periode des Orbits entsprechen muss. Die Stabilitätsanalyse beider Gleichungen bildet ein Floquet-Problem, das bekannt ist aus der zeitverzögerten Rückkopplungskontrolle. Das gilt insbesondere für die longitudinale Gleichung, denn diese Koordinate steht für die Eigenschaft der virtuellen Selbstrückkopplung eines einzelnen Systems. Für eine detaillierte Analyse der Selbstrückkopplung wird auf die Arbeit von Just et al. [32] verwiesen. Aus den Ergebnissen dieser Arbeit wird deutlich, dass trotz

der komplexen Dynamik in der Umgebung eines Orbits eine weitreichende Analogie zur vergleichsweise trivialen Fixpunktanalyse hergestellt werden kann. Die zeitliche Entwicklung der Störungen lässt sich schreiben als

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{u}(t) &= \delta \tilde{\mathbf{u}}(t) e^{\Lambda_{\parallel} t} \\ \delta \mathbf{v}(t) &= \delta \tilde{\mathbf{v}}(t) e^{\Lambda_{\perp} t} .\end{aligned}$$

Hierbei sind $\delta \tilde{\mathbf{u}}(t)$ und $\delta \tilde{\mathbf{v}}(t)$ die *Floquet-Vektoren* und die Exponenten Λ_{\parallel} und Λ_{\perp} sind die Floquet-Exponenten. Aufgrund der Periodizität des Antriebs in den Gln. (3.4) und der Übereinstimmung der Verzögerungszeit mit dieser Periode gilt

$$\begin{aligned}\delta \tilde{\mathbf{u}}(t) &= \delta \tilde{\mathbf{u}}(t - \tau) \\ \delta \tilde{\mathbf{v}}(t) &= \delta \tilde{\mathbf{v}}(t - \tau) .\end{aligned}$$

Dann kann man

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{u}_{\tau} &= \delta \mathbf{u} \cdot e^{-\Lambda_{\parallel} \tau} \\ \delta \mathbf{v}_{\tau} &= \delta \mathbf{v} \cdot e^{-\Lambda_{\perp} \tau}\end{aligned}\tag{3.5}$$

ansetzen, sodass die Analyse in der bekannten Form möglich wird. Aus den Gln. (3.5) folgt für diese der allgemeine Ausdruck

$$\begin{aligned}\Lambda_{\parallel} &= \Gamma_{\parallel} \left(k(+e^{-\Lambda_{\parallel} \tau} - 1) \right) \\ \Lambda_{\perp} &= \Gamma_{\perp} \left(k(-e^{-\Lambda_{\perp} \tau} - 1) \right) ,\end{aligned}$$

wobei der ungekoppelte Fall durch

$$\Gamma_{\parallel}(0) = \Gamma_{\perp}(0) = \Lambda_0$$

mit $\Lambda_0 \in \mathbb{C}$ gegeben ist. Der wesentliche Schritt ist die Linearisierung

$$\begin{aligned}\Gamma_{\parallel}(z) &= \Lambda_0 + \underbrace{\frac{d\Gamma_{\parallel}}{dz} \Big|_{z=0}}_{\chi_{\parallel}} \cdot z + \mathcal{O}(|z|^2) \\ \Gamma_{\perp}(z) &= \Lambda_0 + \underbrace{\frac{d\Gamma_{\perp}}{dz} \Big|_{z=0}}_{\chi_{\perp}} \cdot z + \mathcal{O}(|z|^2) .\end{aligned}$$

Damit ergeben sich die Bestimmungsgleichungen der komplexen Exponenten

$$\begin{aligned}\Lambda_{\parallel} &= \Lambda_0 + k\chi_{\parallel}(e^{-\Lambda_{\parallel} \tau} - 1) \\ \Lambda_{\perp} &= \Lambda_0 + k\chi_{\perp}(-e^{-\Lambda_{\perp} \tau} - 1) .\end{aligned}\tag{3.6}$$

Es ist zu erwarten, dass die Abschätzung mit dieser Methode die tatsächlichen Stabilitätseigenschaften hinreichend gut beschreibt [32]. Die Konstanten k , χ_{\parallel} und χ_{\perp} sind komplexwertig und beschreiben die Wirkung der Kopplung, welche infolge der komplexen Winkeldynamik der Floquet-Vektoren abgeschwächt wird. Diese Eigenschaft drückt sich durch $\Re(\chi) < 1$ aus. Es handelt sich dabei um einen Aspekt, der für weitere Analysen in dieser Arbeit von besonderer Bedeutung ist und daher im Folgenden noch präziser erörtert wird. Für eine weitere Interpretation der Gln. (3.6) benötigt man mehr Kenntnis über die typischen Werte der Koeffizienten χ_{\parallel} und χ_{\perp} . Stimmen beide überein, so ergeben sich dieselben Regeln wie für den Fixpunkt. Dass diese Annahme vernünftig ist, wird später gezeigt. Konkret bedeutet das, dass eine Stabilisierung aller Freiheitsgrade erfolgen kann, wenn analog zu Gl. (3.3) die Bedingung $\Re(\Lambda_0)T_p < g_s$ erfüllt ist, während entweder durch $\Im(\Lambda_0)$ oder durch eine entsprechende Kopplung eine passende Phasendrehung erzeugt wird. Hierbei ist Λ_0 der Floquet-Exponent des ungestörten Orbits. Sein Realteil steht für die Instabilität und der Imaginärteil für die Torsion des Orbits.

Spezielle Orbits

Am Beispiel eines Orbits mit einer π -Torsion pro Umlauf, wie er bei den verwendeten Systemen häufig vorkommt, lässt sich die Dynamik der Floquet-Vektoren qualitativ erklären. In longitudinaler Richtung sorgt die Torsion für die Stabilisierung nach dem bekannten Mechanismus. In transversaler Richtung sorgt aber das umgekehrte Vorzeichen dafür, dass sich verzögerter und instantaner Term in ihrer Wirkung gegenseitig aufheben, anstatt sie zu verstärken. Im transversalen Unterraum verhält sich der Orbit mit π -Torsion also wie sonst torsionsfreie Orbits, die für die übliche Kontrollmethode nicht zugänglich sind [33]. Das Stabilitätsproblem ist analog zu dem des Fixpunktes $\mathbf{x}_* = 0$ des Diodenoszillators für eine Verzögerungszeit von $\tau = T_0/2$. Die Umgebung des Fixpunktes vollzieht in dieser Zeit eine π -Rotation analog zur Torsion des Orbits. Es gibt allerdings auch Orbits mit einer anderen Torsion als π . Beträgt die Torsion eines Orbits ein Vielfaches von 2π oder ist der Orbit torsionsfrei, kehrt sich die Aussage um, so dass der Orbit transversal stabil werden kann, während er longitudinal instabil bleibt. Eine vollständige Stabilisierung ist aber nicht ausgeschlossen, weil auch Orbits mit einer $\pi/2$ -Torsion denkbar sind, für die der Überlapp longitudinaler und transversaler Stabilität möglich wird.

Zusammenfassend lässt sich über die vollständig synchronen periodischen Orbits sagen, dass eine gegenseitige Stabilisierung in dem verwendeten Kopplungsschema zwar prinzipiell möglich, aber sehr eingeschränkt ist. Es müssen zusätzliche Freiheitsgrade stabilisiert werden, die bei der einfachen Selbstrückkopplung nicht existieren. Das ist eine allgemeine Einschränkung an die Stabilisierbarkeit der Orbits. Diese Freiheitsgrade sind diejenigen der transversalen Koordinate, für die die Entwicklungsgleichung fast identisch ist mit der der longitudinalen. Der einzige und wesentliche Unterschied ist das Vorzeichen des zeitverzögerten Terms. Die in Abb. 3.1 erkennbaren schmalen Synchronisationsgebiete kommen von delay-induzierten Orbits, die infolge der invasiven Kopplung derart verformt sind, dass sie die nötigen Bedingungen für einen Überlapp longitudinaler und transversaler Stabilität erfüllen. Sie decken nur einen sehr kleinen Teil derjenigen Stabilitätsgebiete ab, die bei einem einzelnen System mit Selbstrückkopplung zu beobachten sind (siehe Abb. 3.6). In τ -Richtung liegen die Synchronisationsgebiete immer ein wenig von den vollen Perioden entfernt. Dadurch entsteht eine zusätzliche Phasendrehung, die für den diskutierten Mechanismus entscheidend ist. Auch hier lohnt sich der Vergleich mit dem Fixpunkt. Dessen Stabilisierung ist wie die der Orbits nur beim Überlapp longitudinaler und transversaler Stabilitätsgebiete möglich. Der Überlapp findet sich in der Nähe der Verzögerungszeiten, die einer $\pi/2$ -Rotation der Umgebung entsprechen. Man kann davon ausgehen, dass die zusätzliche Torsion der delay-induzierten Orbits auch etwa diesen Wert hat.

3.5 Stabilität vollständiger aperiodischer Synchronisation

Nach den Ergebnissen der vorigen Abschnitte erwartet man keine wesentlichen Synchronisationsgebiete für Verzögerungszeiten nahe einer vollen Zyklusdauer des Oszillators. Mit zunehmender Verzögerungszeit nimmt aber aufgrund der virtuellen Selbstrückkopplung die Anzahl potenzieller dynamischer Zustände zu [76], die sich im Falle vollständiger Synchronisation einstellen könnten. Innerhalb der Synchronisationshyperebene kann es also mehrere koexistente Lösungen geben, die sich auch in ihrer longitudinalen und transversalen Stabilität unterscheiden. Für eine Verzögerungszeit nahe der Periodendauer des Periode-3 Orbits gibt es ein auffälliges Gebiet vollständiger Synchronisation, wobei die gemeinsame Trajektorie überwiegend aperiodisch ist. Dieses Phänomen wurde zuerst von Shirahama entdeckt [77] und im Rahmen dieser Arbeit weiter untersucht. Man findet je nach Parametern sowohl quasiperiodische als auch chaotische Trajektorien.

Ein analytischer Ansatz zur Erklärung des Phänomens, der auf Eigenwertgleichungen wie Gln. (3.2) und (3.6) aufbaut, ist sicherlich nicht ohne Weiteres möglich. Für die Stabilitätsanalyse des Fixpunktes wurden bereits Näherungen herangezogen, nämlich die Reduktion des Raumes um eine Dimension wegen des stabilen Freiheitsgrades und die Näherung durch eine Normalform. Letztere gilt nur, solange

der Antriebsparameter a und die Kopplung k hinreichend klein sind. Für das Floquet-Problem bei der Stabilitätsanalyse der Orbits wurden implizit ähnliche Näherungen gemacht.

Die wesentlichen Kenngrößen für die Analyse der vollständigen Synchronisation auf einer aperiodischen Zieltrajektorie $\zeta(t)$ sind zunächst die longitudinalen und transversalen Lyapunovexponenten, für die ich auch die Schreibweise Λ_{\parallel} und Λ_{\perp} verwende. Diese sind reelle Größen und nicht zu verwechseln mit den Floquet-Exponenten der periodischen Orbits oder den Eigenwerten der Linearisierung um einen Fixpunkt. Letztere werden als *lokale Exponenten* bezeichnet, wenn die Linearisierung nicht an einem Fixpunkt, sondern an einer beliebigen Stelle der Trajektorie ausgewertet wird. Infolge der Zeitentwicklung der Trajektorie gibt es keinen trivialen Zusammenhang zwischen den lokalen Exponenten und den globalen Größen Λ_{\parallel} und Λ_{\perp} . Der Ausgangspunkt für die Berechnung der Exponenten ist die Zeitentwicklung einer Störung der Trajektorie, die ich wieder in longitudinalen und transversalen Koordinaten ansetze

$$\begin{aligned}\dot{\delta \mathbf{u}} &= \mathbf{Df}(\zeta(t))\delta \mathbf{u} + \mathbf{K}(+\delta \mathbf{u}_{\tau} - \delta \mathbf{u}) \\ \dot{\delta \mathbf{v}} &= \mathbf{Df}(\zeta(t))\delta \mathbf{v} + \mathbf{K}(-\delta \mathbf{v}_{\tau} - \delta \mathbf{v}).\end{aligned}\tag{3.7}$$

Auf den ersten Blick scheint der Unterschied zu Gln. (3.4) kaum eine Rolle zu spielen, da es sich um dieselben linearen Tangentialsysteme handelt und lediglich die Trajektorie im Antrieb ausgetauscht worden ist. Im Folgenden zeige ich, dass dieser Schritt aber einen entscheidenden Unterschied macht. Es gibt Lösungen der Gln. (3.7) von der Art

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{u}^{(j)}(t) &= \mathbf{a}_{\parallel}^{(j)}(t) e^{\Lambda_{\parallel}^{(j)} t} \\ \delta \mathbf{v}^{(j)}(t) &= \mathbf{a}_{\perp}^{(j)}(t) e^{\Lambda_{\perp}^{(j)} t}.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Die Exponenten $\Lambda_{\parallel}^{(j)}$ und $\Lambda_{\perp}^{(j)}$ mit $j \in \mathbb{N}$ stehen für den j -ten Lyapunovexponenten. Da die Dimension des Raumes infolge der Zeitverzögerung unendlich geworden ist, gibt es auch eine unendliche Anzahl von Exponenten, von denen alle bis auf eine abzählbare Menge von Ausnahmen stark negativ sind. Zu jedem Exponenten gehört ein Lyapunov-Vektor $\mathbf{a}^{(j)}(t) \in \mathbb{R}^N$, dessen Länge beschränkt ist nach

$$0 \leq c_1^{(j)} < |\mathbf{a}^{(j)}(t)| < c_2^{(j)} < \infty \quad \forall t,$$

und der selbst keinen exponentiellen Trend besitzt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left(\frac{|\mathbf{a}^{(j)}(t)|}{|\mathbf{a}^{(j)}(0)|} \right) = 0.\tag{3.9}$$

Dann ergeben sich mit Gln. (3.8) die Exponenten automatisch nach der bekannten Definition

$$\begin{aligned}\Lambda_{\parallel}^{(j)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left(\frac{|\delta \mathbf{u}^{(j)}(t)|}{|\delta \mathbf{u}^{(j)}(0)|} \right) \\ \Lambda_{\perp}^{(j)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left(\frac{|\delta \mathbf{v}^{(j)}(t)|}{|\delta \mathbf{v}^{(j)}(0)|} \right).\end{aligned}$$

Entscheidend für die Stabilität der Trajektorie in jedem Teilraum ist der jeweils größte Exponent

$$\begin{aligned}\Lambda_{\parallel} &:= \max_j (\Lambda_{\parallel}^{(j)}) \\ \Lambda_{\perp} &:= \max_j (\Lambda_{\perp}^{(j)}).\end{aligned}$$

Für eine (hyper-)chaotische Trajektorie ist $\Lambda_{\parallel} > 0$. Für eine quasiperiodische Trajektorie ist $\Lambda_{\parallel} = 0$ und es gibt noch mindestens einen weiteren Exponenten $\Lambda_{\parallel}^{(j_0)} = 0$. Das hängt damit zusammen, dass in einem autonomen System, das nicht auf einen stabilen Fixpunkt relaxiert, immer mindestens ein longitudinaler Exponent den Wert Null annimmt. Dieser Exponent entspricht einer Verschiebung $\delta \mathbf{u}$ genau entlang der Trajektorie, was äquivalent ist zu einer Zeitverschiebung. Da die Trajektorie im Langzeitmittel nicht beschleunigt, bleibt diese Verschiebung konstant und ist eine Erhaltungsgröße im Fluss des Systems. Ich nenne im Folgenden $\Lambda_{\parallel}^{(j_0)}$ den *Null exponenten* und den dazugehörigen Vektor $\mathbf{a}^{(j_0)}(t)$ bezeichne ich als die *Nullmode*¹. Die oben definierten Lyapunovexponenten sind allgemein gültige Größen, so dass sie für einen periodischen Orbit dem Realteil des Floquet-Exponenten und für einen Fixpunkt dem Realteil des lokalen Exponenten entsprechen. Auch stabile periodische Orbits haben eine Nullmode, so dass der maximale Exponent des Orbits Null ist. Deshalb kann man anhand des maximalen Exponenten allein nicht erkennen, ob der Antrieb periodisch oder quasiperiodisch ist. In transversaler Richtung sind die Verhältnisse einfacher, denn für $\Lambda_{\perp} < 0$ konvergiert $\delta \mathbf{v}(t) \rightarrow 0$ und die Synchronisationshyperebene ist stabil. Andernfalls ist sie instabil und vollständige Synchronisation ist nicht zu erwarten. Der Exponent Λ_{\perp} gibt aber nur an, ob die Hyperebene im Phasenraum lokal attraktiv oder repulsiv ist. Globale Aussagen sind damit nicht möglich. Deshalb wird als ein ‘hartes’ Kriterium für das Eintreten vollständiger Synchronisation die Bedingung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t)) = 0$$

verwendet [11]. In der Tat fällt im Experiment bei vielen der in Abb. 3.1 markierten Synchronisationsgebiete auf, dass sie sich erst bei synchronen Startbedingungen stabilisieren. Ansonsten läuft die Trajektorie auf einen anderen Attraktor außerhalb der Synchronisationshyperebene.

Die maximalen Lyapunovexponenten und die dazugehörigen Lyapunov-Vektoren lassen sich numerisch mühelos aus der Integration der linearen Tangentialsysteme gewinnen. Experimentell sind sie sehr viel schwieriger zugänglich. Möchte man darüber hinaus das gesamte Lyapunovspektrum untersuchen, steigt der Aufwand enorm, sowohl numerisch als auch experimentell. Es stellt sich in diesem Zusammenhang die Frage, welchen Erkenntnisgewinn eine Auswertung der Exponenten für den Mechanismus der vollständigen chaotischen Synchronisation bringt, und wie diese Untersuchung im Einzelnen durchzuführen ist. Wünschenswert wäre ein Zusammenhang wie in der Eigenwertgleichung (3.2), mit dessen Hilfe man nur aus dem Wissen über intrinsische Eigenschaften der verwendeten Systeme eine Aussage über die Synchronisierbarkeit und die möglichen dynamischen Zustände machen kann. In den nächsten Abschnitten zeige ich mehrere Ansätze, die für ein solches Ziel geeignet erscheinen.

3.5.1 Freie Exponenten

Die Stabilitätseigenschaften der synchronen dynamischen Zustände ergeben sich aus der Zeitentwicklung der Gleichungen (3.7). Um diese zu verstehen, wäre es wünschenswert, wenn man die Kopplungsparameter \mathbf{K} und τ variieren könnte, ohne dabei gleichzeitig die antreibende Trajektorie $\zeta(t)$ zu beeinflussen. Nach Kapitel 1, insbesondere mithilfe der Schreibweise in Gln. (1.18), ist unmittelbar ersichtlich, dass eine Variation der Kopplungsparameter im invasiven Kopplungsschema direkten Einfluss auf $\zeta(t)$ haben muss. Der Verlauf des Lyapunovspektrums ist entsprechend eine Menge sehr zerklüfteter Funktionen, ganz analog zu dem Spektrum in Abb. 2.7, da in der Regel selbst bei kleinen Veränderungen eines Parameters beliebig viele unterschiedliche dynamische Zustände durchlaufen werden. Für die folgenden Überlegungen gehe ich davon aus, dass es wie in Gln. (1.21) und (1.25) zusätzliche Kopplungen gibt, durch die das transversale lineare Tangentialsystem auf die gewünschte Weise variiert werden kann.

Der wesentliche Punkt, der die Stabilitätsanalyse einer chaotischen Trajektorie von der eines periodischen Orbits unterscheidet, liegt in der Tatsache, dass auch der Lyapunov-Vektor $\mathbf{a}(t)$ nicht periodisch

¹ Diese wird auch *Goldstone-Mode* genannt.

ist, so dass es für keine Verzögerungszeit τ möglich ist, die zeitverzögerten Vektoren $\delta \mathbf{u}_\tau$ und $\delta \mathbf{v}_\tau$ auf die instantanen Größen $\delta \mathbf{u}$ und $\delta \mathbf{v}$ abzubilden, wie es in den Gln. (3.5) angesetzt wurde. Der erste allgemeine Ansatz für eine Relation, der die Lyapunovexponenten genügen müssen, ist also

$$\Lambda = \Xi_\zeta(\mathbf{K}, \tau, \Lambda) .$$

Zur Vereinfachung wurden die Indizes für longitudinal und transversal sowie der Zählindex j weggelassen. Ein Exponent hängt also von der Antriebstrajektorie $\zeta(t)$, von der Kopplung \mathbf{K} , von der Verzögerungszeit τ und folglich auch implizit von sich selbst ab. Da die Trajektorie zunächst nicht als Veränderliche angesehen wird, verzichte ich im Folgenden auch auf diesen Index. Um wenigstens einen Ansatz zur Analyse dieser völlig unbekannten Relation zu bekommen, vereinfache ich sie zunächst in Anlehnung an das für periodische Orbits benutzte Verfahren, indem ich mit $\mathbf{K} = k\mathbf{Q}$ nur die Kopplungsstärke als Variable zulasse und zusätzlich die Abspaltung des exponentiellen Trends durch die Lyapunov-Vektoren in Gln. (3.8) formal berücksichtige. Dann folgt aus den linearen Systemen (3.7)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{a}}_\parallel + \Lambda_\parallel \mathbf{a}_\parallel &= \mathbf{Df}(\zeta(t)) \mathbf{a}_\parallel + k\mathbf{Q} \left(+\mathbf{a}_{\parallel,\tau} e^{-\Lambda_\parallel \tau} - \mathbf{a}_\parallel \right) \\ \dot{\mathbf{a}}_\perp + \Lambda_\perp \mathbf{a}_\perp &= \mathbf{Df}(\zeta(t)) \mathbf{a}_\perp + k\mathbf{Q} \left(-\mathbf{a}_{\perp,\tau} e^{-\Lambda_\perp \tau} - \mathbf{a}_\perp \right) . \end{aligned} \quad (3.10)$$

Da $\mathbf{a}_\tau \neq \mathbf{a}$ müssen die Exponenten hierbei also durch eine Funktion mit zwei Argumenten ausgedrückt werden. Das erste Argument steht für den Beitrag des verzögerten und das zweite für den des instantanen Kopplungsterms der Gln. (3.10)

$$\begin{aligned} \Lambda_\parallel &= \Gamma_\parallel \left(+k \cdot e^{-\Lambda_\parallel \tau}, -k \right) \\ \Lambda_\perp &= \Gamma_\perp \left(-k \cdot e^{-\Lambda_\perp \tau}, -k \right) . \end{aligned} \quad (3.11)$$

Die Funktionen erfüllen die Bedingung

$$\Gamma_\parallel(0,0) = \Gamma_\perp(0,0) = \Lambda_0 ,$$

wobei ich Λ_0 als *freien Exponenten* bezeichne. Er kommt aus der Zeitentwicklung des speziellen linearen Tangentialsystems

$$\begin{aligned} \dot{\delta \mathbf{w}} &= \mathbf{Df}(\zeta(t)) \cdot \delta \mathbf{w} \\ \Rightarrow \quad \Lambda_0 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left(\frac{|\delta \mathbf{w}(t)|}{|\delta \mathbf{w}(0)|} \right) . \end{aligned}$$

Die Anzahl der Exponenten Λ_0 ist gleich der Dimension N eines einzelnen frei laufenden Systems. Entsprechend muss es jeweils N der Gln. (3.11) geben. Für $k > 0$ kommen unendlich viele weitere Exponenten hinzu, die zu den neu eröffneten Freiheitsgraden der Zeitverzögerung gehören. Am wichtigsten ist der jeweils größte Exponent, der auch numerisch mühelos zu erfassen ist.

Die Frage in dieser Arbeit ist, ob die Funktionen $\Gamma(\cdot)$ sinnvoll approximiert werden können und wie diese Näherung konkret durchgeführt wird. Eine Möglichkeit bietet die Entwicklung für kleine Argumente um den bekannten Punkt $(0,0)$. Falls die Funktionen an diesem Punkt differenzierbar sind, kann man mit den Entwicklungskoeffizienten

$$\begin{aligned} \chi &= \left. \frac{\partial \Gamma(z_1, z_2)}{\partial z_1} \right|_{(z_1, z_2)=(0,0)} \\ \eta &= \left. \frac{\partial \Gamma(z_1, z_2)}{\partial z_2} \right|_{(z_1, z_2)=(0,0)} \end{aligned}$$

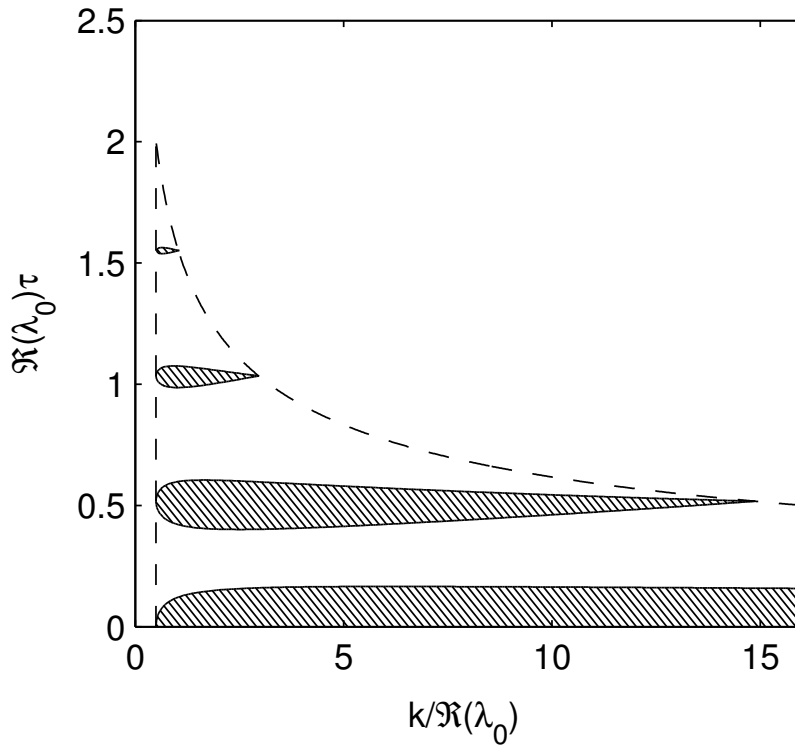


Abbildung 3.3: Äußerste Grenzen der transversalen Stabilität für den Fixpunkt

die Gln. (3.11) approximieren, so dass

$$\begin{aligned}\Lambda_{\parallel} &= \Lambda_0 + k \left(\chi_{\parallel} \cdot e^{-\Lambda_{\parallel}\tau} - \eta_{\parallel} \right) \\ \Lambda_{\perp} &= \Lambda_0 - k \left(\chi_{\perp} \cdot e^{-\Lambda_{\perp}\tau} + \eta_{\perp} \right) .\end{aligned}\tag{3.12}$$

Falls es mit der Differenzierbarkeit Probleme geben sollte, kann diese Näherung dennoch gute Resultate liefern, indem man die Koeffizienten auf eine andere Weise anpasst. Die Gültigkeit und Aussagekraft dieses Ansatzes lässt sich auf vielfältige Weise überprüfen. Insbesondere ergeben sich a priori Vorhersagen über mögliche Parameterkonstellationen, für die stabile vollständige Synchronisation wahrscheinlich ist. Ist $\chi = \eta$, dann nehmen die Eigenwertgleichungen (3.12) dieselbe Form an wie bei Fixpunkten und periodischen Orbits. In diesem Fall ergibt sich die grundlegende Einschränkung (siehe [78])

$$\Lambda_0\tau \leq 2 .\tag{3.13}$$

Diese Relation sieht man am besten ein, wenn man zum Vergleich die Gebiete transversaler Stabilität des Fixpunktes in Abb. 3.3 betrachtet. Dieselben Verhältnisse gelten auch für periodische Orbits, wobei die Gebiete durch den Skalierungsfaktor χ beliebig auf der k -Achse verzerrt werden können. Der Vergleich mit Fixpunkten und periodischen Orbits ist zwar nach den vorangegangenen Überlegungen nur sehr eingeschränkt gerechtfertigt. Trotzdem erkennt man einen wesentlichen Teil des Mechanismus der vollständigen Synchronisation: Da die longitudinale Koordinate nicht durch die Kopplung stabilisiert werden muss, sondern es im Gegenteil für Chaos sogar erwünscht ist, dass mindestens ein instabiler Freiheitsgrad vorliegt, fällt die Einschränkung des Überlapps der Stabilitätsgebiete weg, die für den Fixpunkt und periodische Orbits zur Bedingung (3.3) geführt hat. Deshalb ist es in einem gewissen Sinne in dem vorliegenden Kopplungsschema wahrscheinlicher, vollständige chaotische Synchronisation zu finden, als

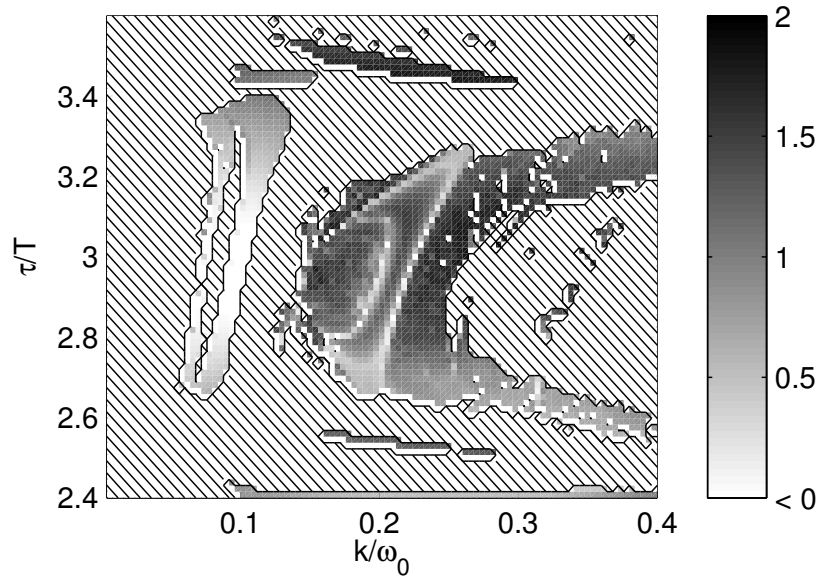


Abbildung 3.4: Das Produkt $\Lambda_0 \tau$ für Trajektorien aus Synchronisationsgebieten. In den gestreiften Bereichen gibt es keine vollständige Synchronisation.

synchrone stabile Orbits oder einen gemeinsamen Fixpunkt. Es handelt sich hierbei um das stärkste allgemeine Argument für das Auftreten vollständiger chaotischer Synchronisation. Für detailliertere Aussagen benötigt man eine tiefere Kenntnis über das Zustandekommen typischer Werte von χ_\perp und η_\perp und den Gültigkeitsbereich der Näherung. Diese Untersuchung betrifft am meisten den Aspekt der komplexen Winkeldynamik der Lyapunov-Vektoren. Schon in Abb. 3.3 ist zu sehen, wie wichtig die Phasenlage des zeitverzögerten Vektors zu seinem instantanen Wert ist. Synchronisationsgebiete entstehen innerhalb des möglichen Bereichs nur, wenn $\delta \mathbf{v}_\tau$ und $\delta \mathbf{v}$ möglichst kollinear sind. Die Berührpunkte dieser einzelnen Gebiete mit der Einhüllenden finden sich bei denjenigen Verzögerungszeiten, für die die Umgebung des Fixpunktes gerade eine Rotation um ein Vielfaches des Vollwinkels vollzieht.

Die bisherigen Aussagen für die Abschätzung der Synchronisierbarkeit lassen sich zunächst anhand von stichprobenartigen Untersuchungen überprüfen. Das Synchronisationsgebiet nahe $\tau = 3T_0$, wie man es experimentell findet, wird auch in einer numerischen Simulation mit guter Übereinstimmung reproduziert. Dabei können für alle synchronen Trajektorien $\zeta(t)$ die freien Exponenten ausgewertet und damit Gl. (3.13) nachgeprüft werden. Abb. 3.4 zeigt einen Ausschnitt aus der k - τ -Ebene mit dem Synchronisationsgebiet und darin in Graustufen das Produkt $\Lambda_0 \tau$. Die Relation ist für alle Trajektorien des Gebietes erfüllt, darunter auch periodische Trajektorien. Über die statistische Aussage lässt sich am besten durch rigoroses Abtasten des Parameterraums von System und Kopplung mehr in Erfahrung bringen. Dazu messe ich im Experiment systematisch für alle möglichen Kopplungsparameter k und τ die sich einstellenden dynamischen Zustände, um Bilder wie in Abb. 3.1 zu erhalten. Dies wiederhole ich für mehrere Werte des Antriebsparameters a , der wesentlichen Einfluss auf den Wert von Λ_0 hat. Dies ist eine spezielle Eigenschaft des verwendeten Schwingkreises und zeigt sich auch im Lyapunovspektrum dadurch, dass der maximale Exponent im chaotischen Regime etwa dem Verlauf des Fixpunktexponenten folgt. In Abb. 3.5 sind ausgewählte Schnitte des Parameterraums mit der resultierenden Dynamik dargestellt. Es zeigt sich dabei einerseits, dass synchrone Zustände mit aperiodischen Trajektorien insbesondere für große Verzögerungszeiten überwiegen. Das zuvor gefundene Gebiet stellt also keine Ausnahme dar. Andererseits verschwinden diese Gebiete, wenn man a und damit Λ_0 vergrößert. Die grobe Abschätzung durch

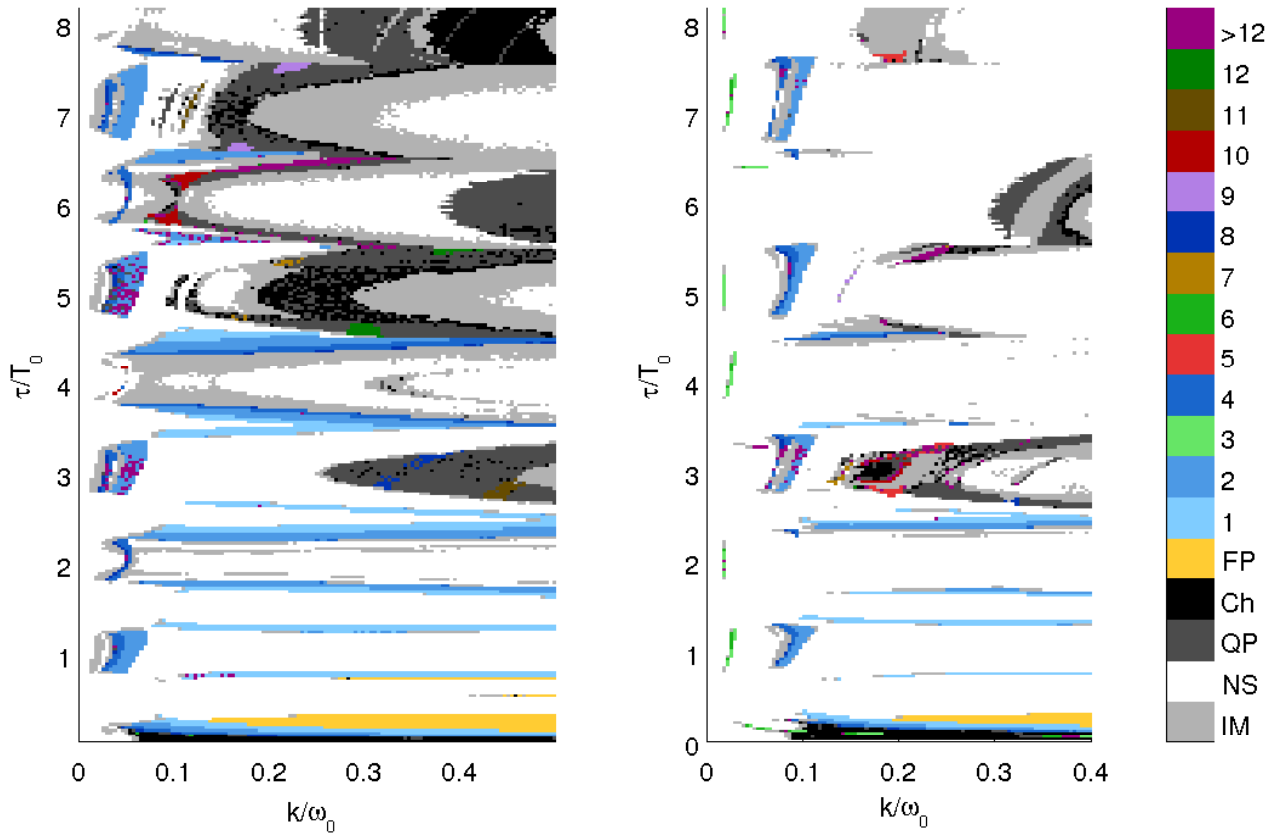


Abbildung 3.5: Schnitte durch den Parameterraum von a, k, τ im Experiment. Links: $a = 0.22$, rechts: $a = 0.265$. Farbcodierung wie in Abb. 3.1, QP: Quasiperiodisch, Ch: Chaotisch.

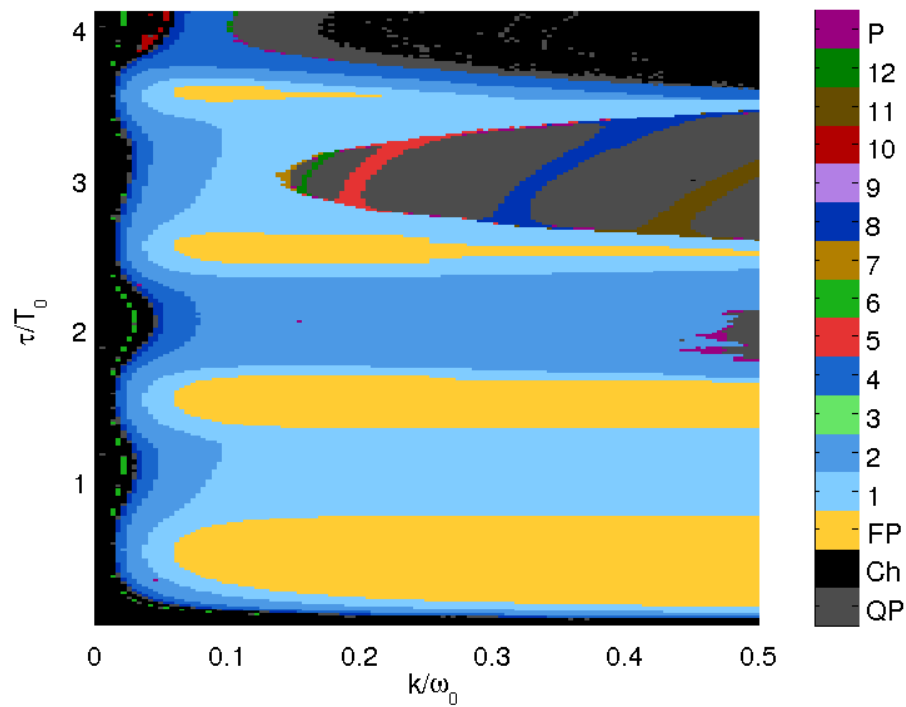


Abbildung 3.6: Dynamische Zustände der k - τ -Ebene für ein einzelnes System mit Selbstrückkopplung im Experiment bei $a = 0.22$. Farbcodierung wie in Abb. 3.5

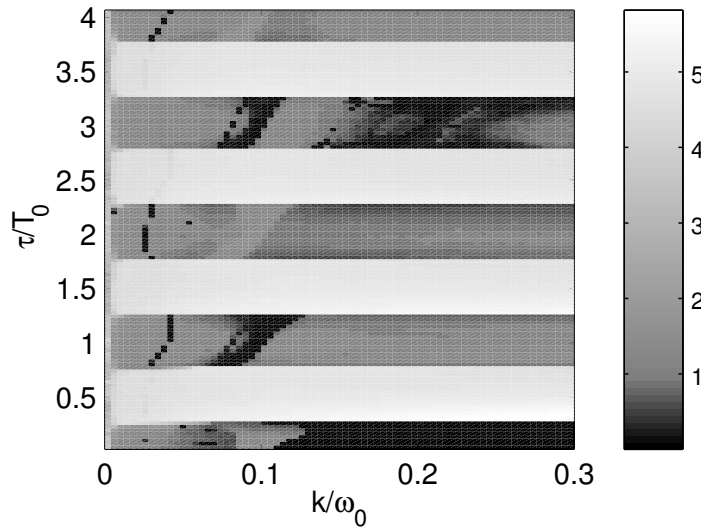


Abbildung 3.7: Die mittlere Differenz $\langle y_2(t) - x_2(t) \rangle_t$ über k und τ für $a = 0.265$. Die streng periodischen Streifen sind die Muster der Phasensynchronisation, die die Bereiche vollständiger Synchronisation überlagern.

Gl. (3.13) scheint also auch für chaotische Synchronisation eine Bedeutung zu haben. Der Grundgedanke dahinter ist, dass die Verzögerungszeit nicht die Zeitskala der intrinsischen Instabilität der Systeme überschreiten darf, um den für die Synchronisation nötigen Austausch von Information zu gewährleisten. Dieses Konzept gilt immer, von einfachen skalaren Regelgrößen bis zu komplexen dynamischen Systemen.

3.5.2 Globale Analyse

Betrachtet man die Ränder des Boomerang-förmigen Synchronisationsgebietes in Abb. 3.1, so stellt man fest, dass diese sich über $\tau > 3.25T_0$ und $\tau < 2.75T_0$ erstrecken. Insbesondere die Gebiete periodischer Synchronisation liegen nahe bei den halbzahligen Vielfachen der Zyklusdauer. Für diese Verzögerungszeiten rasten die Oszillatoren aber bevorzugt auf einer gegenphasigen Synchronisation ein. Führt man dieselbe Messung durch, wie sie auch Abb. 3.1 zugrunde liegt, nur ohne die Startbedingungen auf der Synchronisationshyperebene zu setzen, dann erhält man für die mittlere Differenz der Systemtrajektorien das Bild 3.7. Es zeigt sich ein streng periodisches Muster von gleichphasiger und gegenphasiger Synchronisation. Innerhalb der gegenphasigen Synchronisation ist die vollständige Synchronisation vollkommen unzugänglich. Die Gebiete vollständiger Synchronisation innerhalb der gleichphasigen Lage stimmen mit denen der Abb. 3.1 überein und sind damit global attraktiv. Für praktische Anwendungen sollten daher die Startbedingungen innerhalb des kleineren Einzugsbereichs berücksichtigt werden, falls die Verzögerungszeit in einem der gegenphasigen Gebiete liegen soll.

Ein weiterer globaler Aspekt der vollständigen chaotischen Synchronisation ist die Koexistenz anderer repulsiver Phasenraumobjekte. Für ganzzahlige Verzögerungszeiten kann der instabile gegenphasig synchronisierte Zustand als ein Repellor betrachtet werden, der den Aufenthalt der Trajektorie in der Nähe der Synchronisationshyperebene begünstigt. Für das spezielle Gebiet chaotischer Synchronisation bei

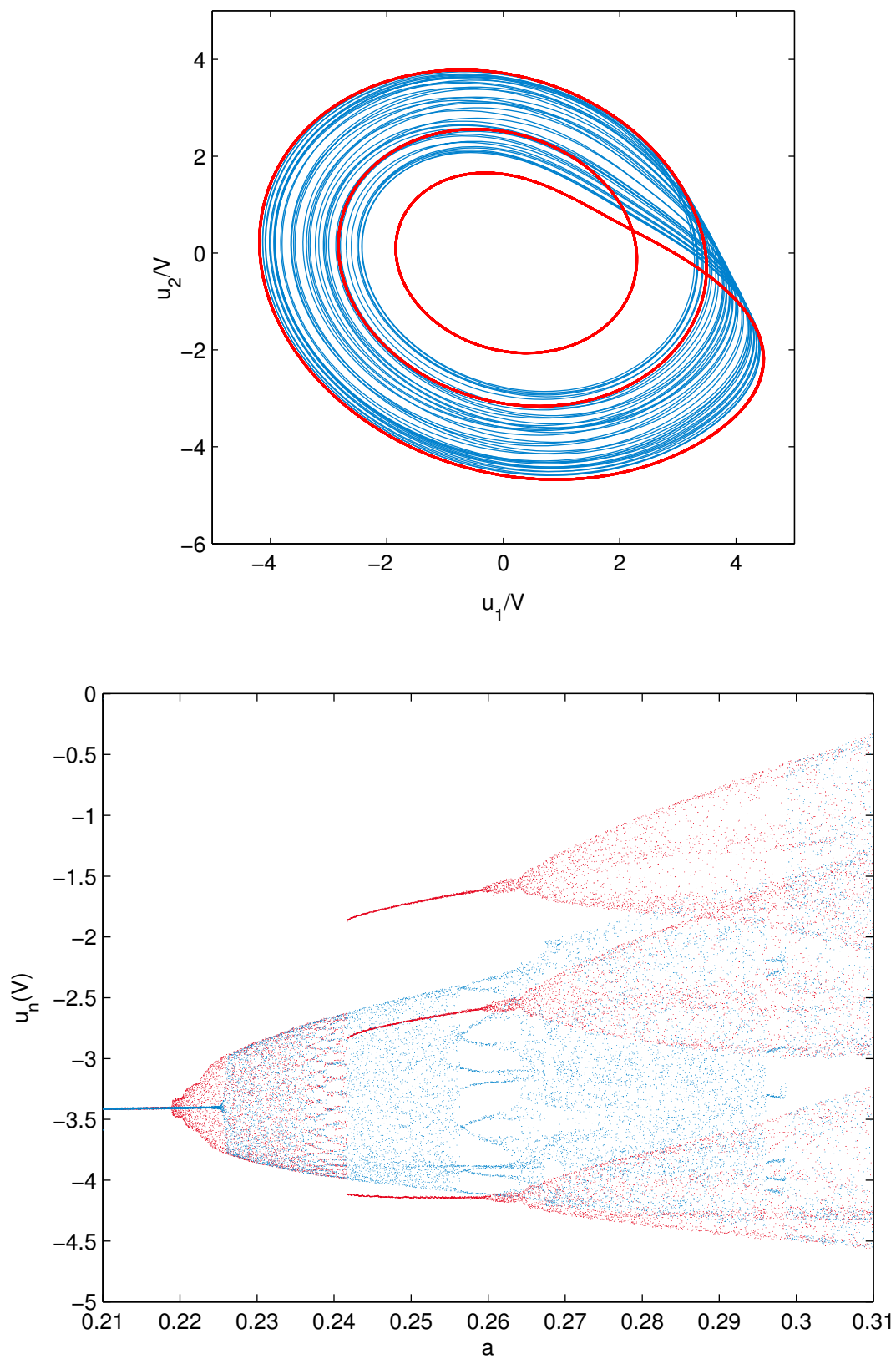


Abbildung 3.8: Hysterese zwischen dem kontrollierten Periode-3 Orbit und anderen seltsamen Attraktoren. Rot: a nimmt ab, blau: a steigt an.

$\tau = 3T_0$ existiert darüber hinaus noch ein Repellor, der sich erst zeigt, wenn man ein einzelnes System mit Selbstrückkopplung konstruiert

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{K}(\mathbf{x}_\tau - \mathbf{x}),$$

oder im Schema (1.16) die vollständige Synchronisation mit einer zusätzlichen instantanen Kopplung erzwingt. Die Kopplungsparameter werden fixiert auf einen zuvor gewählten Punkt, $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0$ und $\tau = \tau_0 = 3T_0$. Anschließend wird der Parameter a variiert, indem man einen variablen Verstärker benutzt und den Verstärkungsfaktor mit einem langsamen Dreiecksignal moduliert. Man beobachtet ein Hystereseverhalten, das in Form eines Bifurkationsdiagramms (Abb. 3.8) sichtbar wird. Neben den seltsamen Attraktoren, die man innerhalb des üblichen Synchronisationsgebietes findet, existiert noch ein longitudinal stabiler Periode-3 Orbit. Dieser stabilisiert sich nach dem Mechanismus der zeitverzögerten Rückkopplungskontrolle und kann beobachtet werden, solange die transversalen Freiheitsgrade künstlich stabil gehalten werden. Ansonsten ist der Orbit wegen den im letzten Abschnitt genannten Argumenten transversal instabil. Damit ist er ein Repellor, der die vollständige Synchronisation auf den anderen Zuständen durch Vergrößerung des Einzugsbereichs unterstützt.

3.5.3 Separate nicht-invasive Kopplung

Eine weitere Möglichkeit, die vollständige chaotische Synchronisation zu untersuchen, liegt in den Gln. (1.18), für die von dem verwendeten Kopplungsschema eine nicht-invasive Kopplung abgespalten wurde

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{F}_K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_\tau) + \mathbf{K}(\mathbf{y}_\tau - \mathbf{x}_\tau) \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{F}_K(\mathbf{y}, \mathbf{y}_\tau) + \mathbf{K}(\mathbf{x}_\tau - \mathbf{y}_\tau).\end{aligned}$$

Es handelt sich hierbei um zwei identische *Delaysysteme*, die durch die nicht-invasive Kopplung interagieren. Nach der üblichen Koordinatentransformation kann man diese Anordnung schreiben als

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{F}_K(\mathbf{u}, \mathbf{u}_\tau) \\ \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{D}\mathbf{F}_K(\mathbf{u}, \mathbf{u}_\tau) \cdot (\mathbf{v}, \mathbf{v}_\tau) - 2\mathbf{K}\mathbf{v}_\tau.\end{aligned}$$

Es handelt sich zwar zunächst nur um eine andere Schreibweise desselben Schemas. Diese lässt sich aber als ein Spezialfall eines Schemas mit zwei separaten Kopplungen verstehen

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{F}_{K_0}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{\tau_0}) + \mathbf{K}(\mathbf{y}_\tau - \mathbf{x}_\tau) \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{F}_{K_0}(\mathbf{y}, \mathbf{y}_{\tau_0}) + \mathbf{K}(\mathbf{x}_\tau - \mathbf{y}_\tau),\end{aligned}\tag{3.14}$$

wobei sich für $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0$ und $\tau = \tau_0$ die Identität mit Gln. (1.18) ergibt. Die virtuelle Selbstrückkopplung, wie sie im Falle vollständiger Synchronisation in Schema (1.16) entsteht, ist in Schema (3.14) eine reale Selbstrückkopplung, die im Folgenden als Bestandteil eines Systems betrachtet wird. Die festen Parameter \mathbf{K}_0 und τ_0 sind dann wie a ein Systemparameter jedes Delaysystems. Die Stabilisierung der vollständigen Synchronisation wird durch die nicht-invasive Gegenkopplung mit den Parametern \mathbf{K} und τ bewirkt. Die maßgebende Instabilität, die durch diese Kopplung kompensiert werden muss, ist hierbei nicht der freie Exponent Λ_0 , sondern der longitudinale Exponent Λ_{\parallel} , der die charakteristische Größe der beiden Delaysysteme ist. D.h., Λ_{\parallel} gibt vor, wie instabil ein einzelnes Delaysystem wäre, und nach dem Äquivalenzprinzip (1.2) entfernen sich benachbarte Trajektorien von zwei Delaysystemen bei $\mathbf{K} = 0$ genau mit der durch Λ_{\parallel} vorgegebenen Rate. Da Λ_{\parallel} eine feste Systemgröße ist, bleibt die Frage nur nach einer Relation für den transversalen Exponenten. Unter der Voraussetzung, dass man die Delaysysteme wie gewöhnliche dynamische Systeme behandeln kann, wie es z.B. für $\tau_0 \ll \tau$ sinnvoll wäre, hängt der Exponent nur von $\mathbf{K} = k\mathbf{Q}$ und τ ab

$$\Lambda_{\perp} = \Gamma_{\perp} \left(2k \cdot e^{-\Lambda_{\perp}\tau} \right).$$

Die Vorgehensweise ist dabei analog zu der in Abs. 3.5.1. Es ist

$$\Gamma_{\perp}(0) = \Lambda_{\parallel}$$

und deshalb führt eine Entwicklung zu

$$\Lambda_{\perp} = \Lambda_{\parallel} - 2k\chi_{\perp} \cdot e^{-\Lambda_{\perp}\tau}.$$

Unabhängig von dem Wert von χ_{\perp} ergibt sich hieraus die Einschränkung für Stabilität (siehe Anhang B.2)

$$\Lambda_{\parallel}\tau \leq 1. \quad (3.15)$$

Die Gültigkeit der Näherung ist hier jedoch besonders fraglich, da für $\tau = \tau_0$ ein starkes Wechselspiel zwischen der zum System gehörigen und der zusätzlichen nicht-invasiven Zeitverzögerung zu erwarten ist. Insbesondere wird dann bei $\mathbf{K} = \frac{1}{2}\mathbf{K}_0$ ein kritischer Punkt erreicht, der genau der Situation in Schema (1.20) entspricht. Die Funktion $\Gamma(\cdot)$ ist dann unabhängig von $\Lambda_{\perp}\tau$, weil der zeitverzögerte Term effektiv nicht vorhanden ist. Inwieweit Gl. (3.15) dennoch aussagekräftig ist, lässt sich numerisch analog zur Analyse der freien Exponenten direkt überprüfen. Abb. 3.9 zeigt denselben Ausschnitt wie Abb. 3.3. Für jeden Punkt vollständiger Synchronisation wird das Produkt $\Lambda_{\parallel}\tau$ ausgewertet. Die Bedingung (3.15) ist in der Tat für alle Trajektorien des Synchronisationsgebietes erfüllt. Es ist aber auch erwähnenswert, dass sie ebenso für manche anderen longitudinal erreichbaren Zustände erfüllt ist, die jedoch transversal instabil sind. Zusätzlich kann man erkennen, dass im Allgemeinen $\Lambda_{\parallel} < \Lambda_0$. D.h., durch die Selbstrückkopplung in den Delaysystemen wird das Chaos ‘laminarer’. Das ist nicht verwunderlich, wenn man bedenkt, dass die Selbstrückkopplung genau dem Schema der zeitverzögerten Rückkopplungskontrolle entspricht. Diese wurde zu dem Zweck konstruiert, Chaos zu unterdrücken. Tatsächlich handelt es sich bei vielen der aperiodischen Trajektorien aus den Synchronisationsgebieten auch nicht um chaotische, sondern um quasiperiodische Lösungen, für die $\Lambda_{\parallel} = 0$. Das bedeutet, dass man die Synchronisationsphänomene teilweise analog zur Phasensynchronisation erklären kann. Infolge der Selbstrückkopplung oszillieren die Systeme auf Tori, die durch kleinste Kopplungen bereits synchronisiert werden können, weil dafür nur eine Verschiebung der marginal stabilen Trajektorien auf dem Torus nötig ist.

Die Separation in fixierte Delaysysteme und eine variable nicht-invasive Kopplung wurde auch experimentell realisiert. Dazu wurden zwei Verzögerungsleitungen für die Selbstrückkopplung auf die festen Parameter k_0 und τ_0 eingestellt, die dann jeweils als Teil eines Delaysystems aufgefasst werden können. Für die nicht-invasive Kopplung wird mindestens noch eine weitere Verzögerungsleitung benötigt. Deren Parameter k und τ werden variiert und die sich einstellende Differenz der Signale $y_2(t)$ und $x_2(t)$ gibt Auskunft über das Auftreten vollständiger Synchronisation. Das Maß

$$\Delta(k, \tau) = \sqrt{\left\langle (y_2(t) - x_2(t))^2 \right\rangle_t}$$

ist in Abb. 3.10 über k und τ aufgetragen. Der Punkt $k_0 = 0.17\omega_0$ und $\tau_0 = 3T_0$ liegt mitten in einem markanten Gebiet vollständiger Synchronisation. Die alternierende Struktur hängt von den erwähnten Phasendrehungen ab, wobei das Fehlen einzelner Gebiete vollständiger Synchronisation mit dem bisher erlangten Wissen noch nicht genau erklärt werden kann. Die Gebiete der Phasensynchronisation folgen stattdessen streng dem periodischen Muster, und es ist zu erwarten, dass sie in τ noch weit über den dargestellten Ausschnitt hinaus reichen. Ob für die äußersten Gebiete vollständiger Synchronisation noch die Relation (3.15) erfüllt ist, ist ohne Weiteres nicht absehbar. Im nächsten Kapitel wird jedoch anhand einer alternativen Messung mit nicht-invasiver Kopplung ersichtlich, dass durch $\Lambda_{\parallel} < \Lambda_0$ die Synchronisation bei viel größeren Verzögerungszeiten möglich ist, als es für freie Systeme ohne ‘Laminarisierung’ infolge der Selbstrückkopplung der Fall ist.

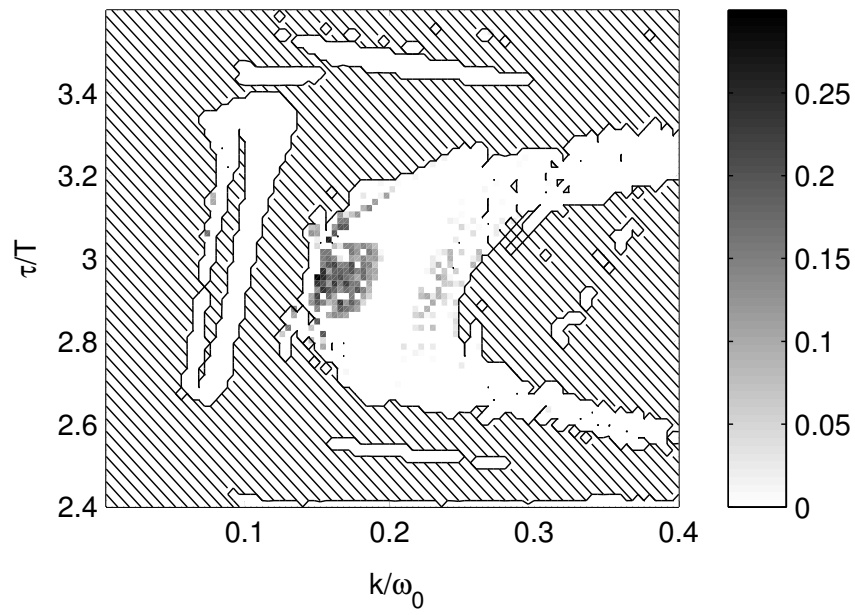


Abbildung 3.9: Das Produkt $\Lambda_{||}\tau$ für vollständig synchrone Trajektorien.

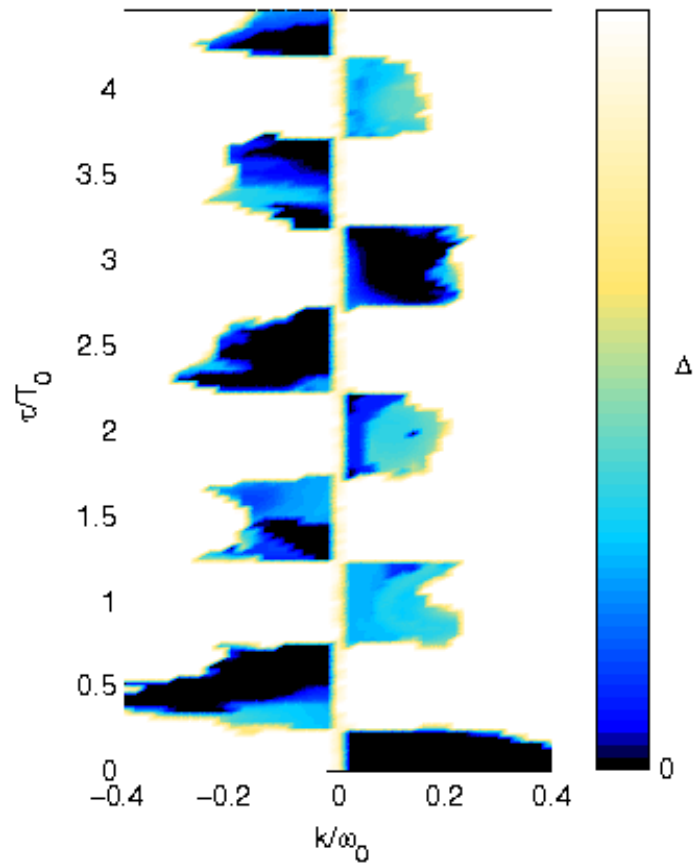


Abbildung 3.10: $\Delta(k, \tau)$ für die nicht-invasive Kopplung der Delay-Diodenoszillatoren.

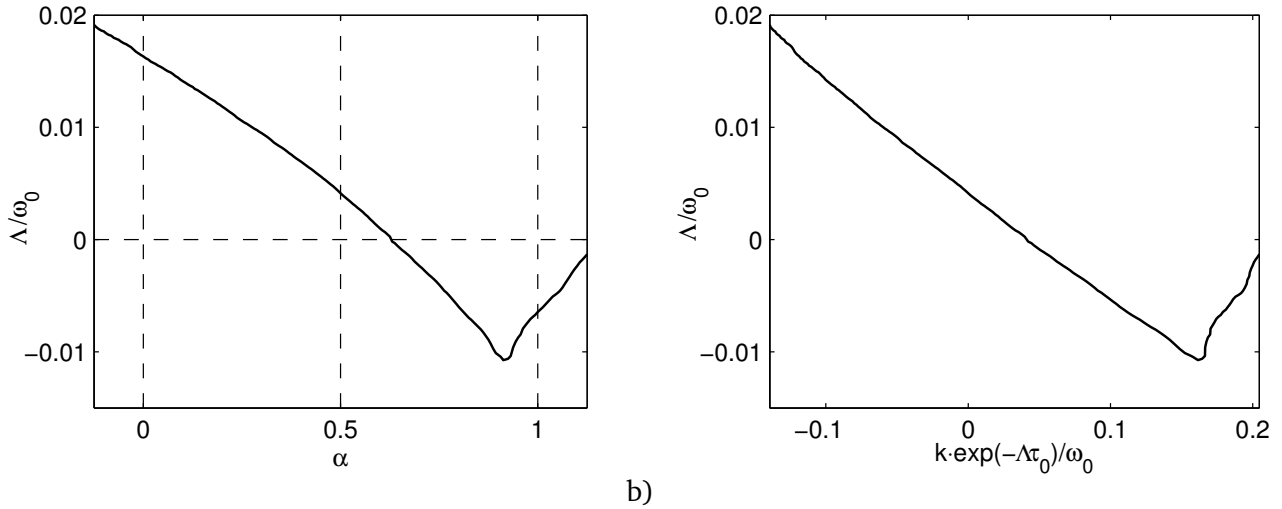


Abbildung 3.11: Größter transversaler Lyapunovexponent bei Variation von α . a) Auftragung über α . Bei $\alpha = 0$ ist $\Lambda = \Lambda_{\parallel}$ des Originalschemas, bei $\alpha = 1$ ist $\Lambda = \Lambda_{\perp}$ des Originalschemas. b) Auftragung über $k_{\alpha} \cdot \exp(-\Lambda \tau_0)$ zur Ermittlung des Entwicklungskoeffizienten χ . Hier ist $\chi = 0.096$.

3.5.4 Zusätzliche Selbstrückkopplung

Sämtliche vorangegangenen Untersuchungen beruhen auf dem Prinzip, dass eine Variation von Kopplungsparametern entweder gedanklich oder in einer speziellen Ausführung durch ein erweitertes Kopplungsschema vollzogen wurde. Dabei wird immer gewährleistet, dass der synchrone Zustand von der Variation unberührt bleibt und mit dem im ursprünglichen Schema übereinstimmt. Die transversale Stabilität der Synchronisationsebene ändert sich aber und gibt dadurch Auskunft über die Mechanismen der Stabilisierung. Die Variationsmöglichkeiten sind beschränkt und es hat sich bereits im letzten Abschnitt gezeigt, dass die einzelnen Techniken überlappen können. Um das Bild zu vervollständigen, benutze ich hier noch die Erweiterung durch Hinzufügen einer Selbstrückkopplung nach dem Schema (1.21). Die Kopplungsparameter \mathbf{K} und τ werden wieder auf die Werte \mathbf{K}_0 und τ_0 fixiert und das Mischungsverhältnis α wird verändert. Aus dem linearen Tangentialsystem

$$\dot{\mathbf{v}} = (\mathbf{Df}(\zeta(t)) - \mathbf{K}_0) \cdot \mathbf{v} + (1 - 2\alpha)\mathbf{K}_0\mathbf{v}_{\tau_0}$$

erhalte ich numerisch den maximalen transversalen Exponenten $\Lambda_{\perp}(\alpha)$. Die Trajektorie $\zeta(t)$, an der das Begleitsystem ausgewertet wird, ist dabei eine ausgewählte chaotische Lösung eines einzelnen Delaysystems wie in Gln. (3.14). Für $\alpha = 1$ entspricht $\Lambda_{\perp}(\alpha)$ genau dem transversalen Exponenten des Originalschemas (1.16). Für $\alpha = 0$ hat man zwei ungekoppelte Systeme jeweils nur mit Selbstrückkopplung vorliegen und es ist $\Lambda_{\perp}(0) = \Lambda_{\parallel}$, was auch mit dem Äquivalenzprinzip in Einklang ist. Abb. 3.11a zeigt den Verlauf $\Lambda_{\perp}(\alpha)$. Soweit es aus dieser Berechnung zu erkennen ist, scheint es sich um eine stetige Funktion zu handeln. Das Profil erinnert stark an das bekannte Bild aus der zeitverzögerten Rückkopplungskontrolle oder die longitudinale Kurve für den Fixpunkt in Abb. 3.2b. Wie erwartet ist $\Lambda_{\perp}(0) > 0$ und $\Lambda_{\perp}(1) < 0$. Das ist die typische Signatur vollständiger chaotischer Synchronisation. Ein ungewöhnliches Resultat ist hingegen, dass $\Lambda_{\perp}(1/2) > 0$ ist. Die gemischte Kopplung wurde in der Literatur häufig als diejenige mit der besten transversalen Stabilität dargestellt (siehe z.B. [53]). Im Rahmen einer Bachelorarbeit wurde dieses Ergebnis auch für die Diodenoszillatoren bestätigt [79]. Bei der ausgewählten Trajektorie, die der Untersuchung in diesem Kapitel zugrunde liegt, erweist sich die gemischte Kopplung als eine sehr ungeeignete Methode. Der Punkt größter Stabilität liegt aber auch nicht bei $\alpha = 1$. Über eine allgemeine Lagebeziehung für diesen Punkt lassen sich an der Stelle zwar noch keine Aussagen machen. Das vorliegende Ergebnis zeigt aber, dass man für die Optimierung der Stabilität von chaotischer

Synchronisation das Mischungsverhältnis α nicht zwingend auf den Wert $1/2$ festlegen sollte. Da für $\alpha \rightarrow 0$ die Systeme zunehmend ungekoppelt sind, ist zu erwarten, dass der optimale Punkt zwischen $1/2$ und 1 liegt.

Ordnet man dem Parameter α eine effektive Kopplungsstärke für den verzögerten Term zu nach

$$k_\alpha = (1 - 2\alpha)k_0 ,$$

so kann man aus der Auftragung $k_\alpha \exp(-\Lambda_\perp \tau_0) \mapsto \Lambda_\perp$ den Entwicklungskoeffizienten χ gewinnen. Abb. 3.11b zeigt, dass die zuvor gekrümmte Kurve in dieser Auftragung einen weitgehend geraden Verlauf bekommt. Der Ansatz durch die Entwicklung (3.12) scheint also sinnvoll². Der Entwicklungskoeffizient $\chi = 0.096$ ist aber vergleichsweise nahe bei Null. Das bedeutet, dass der zeitverzögerte Term zwar dafür sorgt, dass der longitudinale und der transversale Exponent sich im Vorzeichen unterscheiden. Er kann aber in keinem Fall den wesentlichen Beitrag zu den Werten von Λ_\perp leisten. Dieser Gedanke wird durch eine zusätzliche Untersuchung klar. Dazu benutze ich wie bei der Berechnung der freien Exponenten Λ_0 die vollständige Trennung von Rückkopplung und Gegenkopplung nach Gln. (1.25) und integriere das lineare Tangentialsystem

$$\dot{\mathbf{v}} = (\mathbf{Df}(\zeta(t)) - \mathbf{K}) \cdot \mathbf{v} + (1 - 2\alpha)\mathbf{K}\mathbf{v}_{\tau_0}$$

mit $\mathbf{K} = k\mathbf{Q}_0$. Ich wähle drei spezielle Schnitte durch die k - α -Parameterebene, nämlich für $\alpha = 0$, $\alpha = 1/2$ und $\alpha = 1$. Die Funktionen $\Lambda_\perp(k)$ sind in Abb. 3.12 aufgetragen. Aus der Funktion für $\alpha = 1/2$ lässt sich der Entwicklungskoeffizient $\eta = 0.517$ bestimmen. Man erkennt deutlich, dass damit der instantane Term im transversalen linearen Tangentialsystem den wesentlichen Beitrag zur Stabilisierung leistet und dass die unterschiedlichen Vorzeichen des verzögerten Terms für $k = k_0$ lediglich eine Feinkorrektur darstellen. Diese ist aber entscheidend für die chaotische Synchronisation. So lässt sich qualitativ erklären, wieso in Abb. 3.5 die Synchronisationsgebiete mit zunehmendem a verschwinden. Zu jedem Attraktor innerhalb der Synchronisationshyperebene mit festen Kopplungsparametern k_0 und τ_0 lassen sich mit den genannten Variationstechniken Kurven $\Lambda_\perp(\alpha, k)$ wie in Abb. 3.12 gewinnen. Mit steigendem a wächst auch Λ_0 und damit heben sich diese Kurven global an. Damit wird es unwahrscheinlicher, dass der transversale Exponent negativ ist. Das Argument lässt sich auch für das Absenken von a anwenden. Dabei sinkt nämlich der longitudinale Exponent $\Lambda_\parallel = \Lambda_\perp(0, k_0)$ zunächst bis auf Null, sodass erst quasiperiodische und dann periodische Synchronisation entsteht. Verkleinert man a weiter, so bilden sich immer häufiger Gebiete mit einem synchronen Fixpunkt, weil Gl. (3.3) für immer größere τ erfüllt wird.

Zusammenfassung

Unter den gewonnenen Aussagen erweisen sich diejenigen über die Stabilität des Fixpunktes als die zuverlässigsten. Die Analyse vollständiger chaotischer Synchronisation stellt dagegen ein umfangreiches und komplexes Problem dar. Zum aktuellen Zeitpunkt fehlen die nötigen Werkzeuge für eine solche Aufgabe und die vorhandenen Konzepte liefern entweder nur zu allgemeine oder sehr schwache konkrete Aussagen. Im nächsten Kapitel gehe ich daher einen Schritt zurück zu einer überschaubaren Fragestellung, die eben diese Werkzeuge für weitere Untersuchungen erschließen soll.

² Hierbei ist zu beachten, dass die Kurve nicht um $k = 0$ aufgenommen wurde. Der Punkt der Entwicklung ist also $(0, k_0)$.

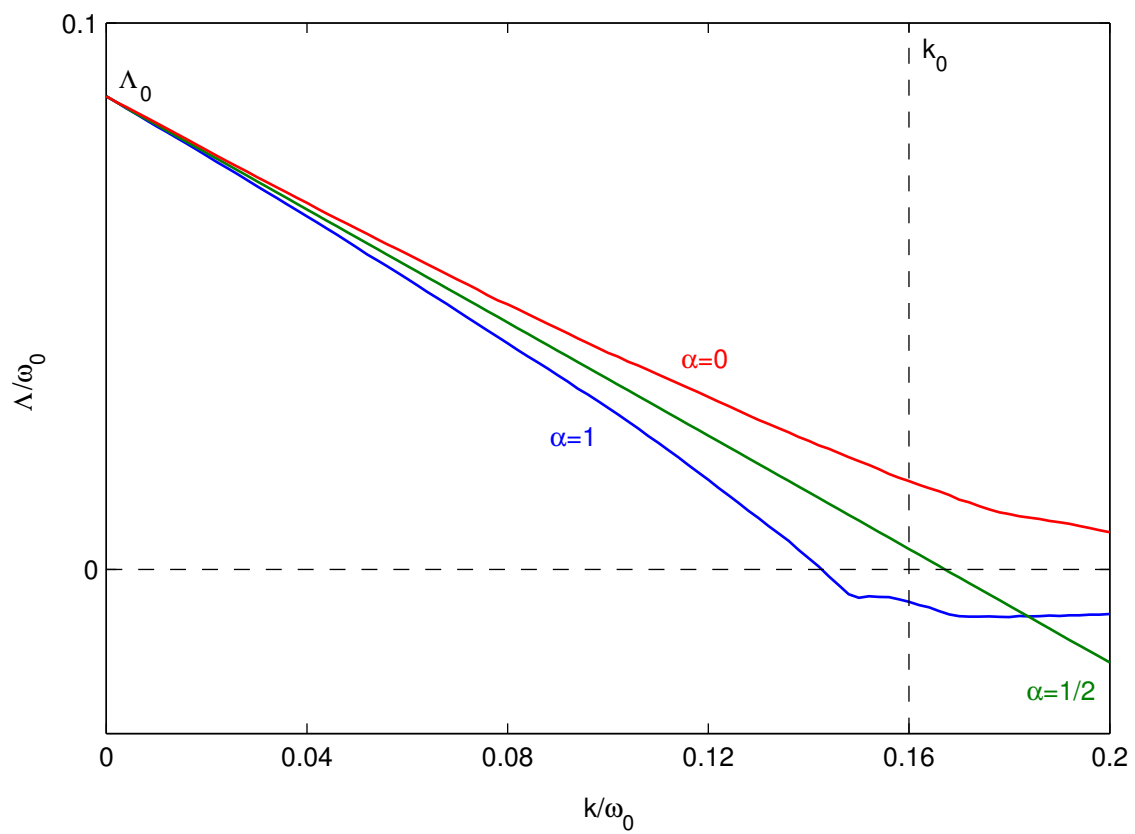


Abbildung 3.12: Größter transversaler Exponent als Funktion von k für verschiedene α . Für $k = 0$ ist Λ gleich dem freien Exponenten Λ_0 . Aus der Steigung des Schnittes bei $\alpha = 1/2$ ergibt sich der Koeffizient $\eta = 0.517$. Bei $k = k_0$ ist $\Lambda = \Lambda_{\parallel}$ für $\alpha = 0$ und $\Lambda = \Lambda_{\perp}$ für $\alpha = 1$.

4 Nichtinvasive Kopplung

Aus den Ergebnissen des vorigen Kapitels wird ersichtlich, dass es sinnvoll ist, zuerst die Wirkung nicht-invasiver Kopplungen zu verstehen, bevor man nach einer angemessenen Beschreibung der vollständigen Synchronisation bei invasiver Kopplung sucht. Im invasiven Schema (1.16) sind die Kopplungsparameter K und τ gleichzeitig auch System- und damit Bifurkationsparameter. Das erschwert die Stabilitätsanalyse, so dass man auf zahlreiche Kunstgriffe ausweichen muss. Selbst damit erfährt man nur etwas über die Eigenschaften einer sehr speziellen chaotischen Trajektorie $\zeta(t)$ eines Delaysystems. Der Schwerpunkt dieses Kapitels ist deshalb die Untersuchung einer ‘Reinform’ der nicht-invasiven Kopplung, wie sie z.B. durch Gln. (1.19) für den bidirektionalen oder durch Gln. (1.23) für den unidirektionalen Fall gegeben ist. Für das Experiment wähle ich die Form

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{f}(\mathbf{y}) + K(\mathbf{x}_\tau - \mathbf{y}_\tau),\end{aligned}\tag{4.1}$$

für die bei vollständiger Synchronisation die Kopplungskraft verschwindet. Diese Anordnung wird mit der üblichen transversalen Koordinate $\mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ und der longitudinalen Koordinate $\mathbf{u} = \mathbf{x}$ in die Form

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{f}(\mathbf{u}) \\ \dot{\mathbf{v}} &= D\mathbf{f}(\mathbf{u})\mathbf{v} - K\mathbf{v}_\tau\end{aligned}\tag{4.2}$$

gebracht. Eine solche Kopplung stellt den Minimalaufwand für die beabsichtigten Untersuchungen dar. Eine bidirektionale Form wäre auch möglich, indem man den entsprechenden Kopplungsterm für das System \mathbf{x} ergänzt. Nach der LT-Transformation erkennt man aber, dass es in linearer Näherung bis auf einen Faktor 2 in der Kopplung mit Gln. (4.2) übereinstimmen würde. Vollständig äquivalent zu Schema (4.1) ist hingegen das Schema für antizipierende Synchronisation

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{f}(\mathbf{y}) + K(\mathbf{x} - \mathbf{y}_\tau),\end{aligned}\tag{4.3}$$

das von Voss eingeführt wurde [65] und später mehrfach aufgegriffen worden ist [80–83]. Aufgrund dieser Äquivalenz gelten alle Aussagen, die ich in diesem Kapitel gewinne, direkt für die antizipierende Synchronisation und bieten gleichzeitig den Ansatz für die Erklärung anderer Phänomene der vollständigen Synchronisation.

4.1 Stabilitätsanalyse

Allgemeine Relationen für den longitudinalen und transversalen Lyapunovexponenten wurden bereits im letzten Kapitel aufgestellt und diskutiert. Diese sind spezifisch für das verwendete Kopplungsschema und lauten für Gln. (4.1)

$$\begin{aligned}\Lambda_{\parallel} &= \Lambda_0 \\ \Lambda_{\perp} &= \Gamma \left(-k \cdot e^{-\Lambda_{\perp} \tau} \right).\end{aligned}\tag{4.4}$$

Der freie Exponent ist hier direkt zugänglich und gehört zu den Freiheitsgraden des ungekoppelt laufenden Mastersystems. Da sich an diesem Exponenten durch die Kopplung nichts ändert, beschränkt sich

die Diskussion auf den transversalen Exponenten, für den ich im Folgenden keinen Index verwende. Es ist leicht einzusehen, dass

$$\Gamma(0) = \Lambda_0 ,$$

was nichts anderes ist als das Äquivalenzprinzip (1.2).

Um einen hilfreichen expliziten Ausdruck für die Funktion $\Gamma(\cdot)$ zu finden, wende ich einige Rechenschritte auf die transversale Gleichung an:

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{Df}(\mathbf{u})\mathbf{v} - \mathbf{K}\mathbf{v}_\tau$$

Multiplikation von links mit $\frac{\mathbf{v}^\top}{|\mathbf{v}|^2}$ und den Abkürzungen $r = |\mathbf{v}|$ und $\mathbf{e}_v = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ ergibt

$$\frac{\dot{r}}{r} = \mathbf{e}_v^\top \mathbf{Df}(\mathbf{u}) \mathbf{e}_v - \mathbf{e}_v^\top \mathbf{K} \frac{\mathbf{v}_\tau}{r} .$$

Die linke Seite ist $(\ln(r))^\bullet$ und damit gleich der lokalen Zuwachsrates $\lambda(t)$ des Betrags des Abstandsvektors \mathbf{v} . Diese ist nicht zu verwechseln mit dem lokalen Exponenten. Ein äquivalentes Ergebnis erhält man, wenn man in der transversalen Gleichung die Definition (3.8) der Lyapunov-Vektoren \mathbf{a} verwendet

$$(\dot{\mathbf{a}} + \Lambda \mathbf{a}) e^{\Lambda t} = \mathbf{Df}(\mathbf{u}) \mathbf{a} e^{\Lambda t} - \mathbf{K} \mathbf{a}_\tau e^{\Lambda(t-\tau)}$$

und eine analoge Projektion mit $\frac{\mathbf{a}^\top}{|\mathbf{a}|^2}$ vornimmt

$$\underbrace{(\ln |\mathbf{a}|)^\bullet + \Lambda}_{\lambda(t)} = \mathbf{e}_v^\top \mathbf{Df}(\mathbf{u}) \mathbf{e}_v - \mathbf{e}_v^\top \mathbf{K} \mathbf{e}_\tau e^{-\Lambda \tau}$$

mit dem Kürzel $\mathbf{e}_\tau = \frac{\mathbf{a}_\tau}{|\mathbf{a}|}$, wobei im Allgemeinen $|\mathbf{e}_\tau| \neq 1$. Benutzt man die Umformung

$$\mathbf{e}_v^\top \mathbf{K} \mathbf{e}_\tau = \text{Sp} \left(\mathbf{K} \mathbf{e}_\tau \mathbf{e}_v^\top \right)$$

und führt eine zeitliche Mittelung durch, dann ergibt sich¹

$$\Lambda = \underbrace{\left\langle \mathbf{e}_v^\top \mathbf{Df}(\mathbf{u}) \mathbf{e}_v \right\rangle}_{\Lambda'_0} - \text{Sp} \left(\mathbf{K} \left\langle \mathbf{e}_\tau \mathbf{e}_v^\top \right\rangle \right) e^{-\Lambda \tau} .$$

Dabei wurde benutzt, dass wegen Gl. (3.9) der Mittelwert $\langle (\ln |\mathbf{a}|)^\bullet \rangle$ verschwindet, d.h., die lokale logarithmische Zuwachsrates konvergiert gegen den globalen Lyapunovexponenten. Dies gilt nicht für die lokalen Exponenten, die sich aus den Eigenwerten von $\mathbf{Df}(\mathbf{u})$ ergeben. Das wird auch aus der Tatsache klar, dass \mathbf{e}_v in der Regel kein Eigenvektor dieser Matrix ist. Für den Beitrag zu Λ , der aus der Kopplung kommt, definiere ich die *C-Matrix* des Lyapunov-Vektors \mathbf{a} als

$$\mathbf{C}_\tau := \left\langle \mathbf{e}_\tau \mathbf{e}_v^\top \right\rangle = \left\langle \frac{\mathbf{a}_\tau \mathbf{a}^\top}{|\mathbf{a}|^2} \right\rangle . \quad (4.5)$$

Damit lässt sich die allgemeine Gl. (4.4) elegant ausdrücken als

$$\Lambda = \Lambda'_0 - \text{Sp} \left(\mathbf{K} \mathbf{C}_\tau \right) e^{-\Lambda \tau} . \quad (4.6)$$

Es scheint zwar zunächst, als ob mit dieser Form gegenüber dem allgemeinen Ausdruck nichts gewonnen wird. Es ist nämlich $\Lambda'_0 = \Lambda'_0(\mathbf{K}, \tau)$ mit $\Lambda'_0(\mathbf{0}, \tau) = \Lambda_0$ eine Funktion der Kopplungsparameter. Das

¹ Im Folgenden steht Λ für Λ_\perp , weil nur noch die transversale Richtung diskutiert wird.

liegt daran, dass die Lyapunov-Vektoren durch die Kopplung beeinflusst werden, so dass je nach Kopplung unterschiedliche Matrixelemente des Antriebs $\mathbf{Df}(\mathbf{u})$ zu Λ'_0 beitragen. Dasselbe gilt auch für die C-Matrix, $\mathbf{C}_\tau = \mathbf{C}_\tau(\mathbf{K})$. Es handelt sich bei beiden Größen trotzdem um nützliche Werkzeuge, die im Einzelnen auch über den Begriff einer einfachen Reihenentwicklung hinaus interpretiert werden können.

Bei Λ'_0 handelt es sich um einen Beitrag zur transversalen Stabilität, der nur aus den Eigenschaften des Flusses im ursprünglichen Phasenraum eines Systems entsteht und der nur sehr indirekt mit der Kopplung zu tun hat. Er kann durch eine Abschätzung der Häufigkeit vorkommender Matrixelemente approximiert werden und liegt damit mit Sicherheit zwischen der maximalen Kontraktionsrate und der maximalen Expansionsrate, die entlang einer Trajektorie vorkommt. Diese können wiederum durch die Lyapunovexponenten des freien Systems abgeschätzt werden.

Die C-Matrix ist per Definition einer Autokorrelationsfunktion sehr ähnlich und kann ggf. auch durch eine solche ersetzt werden. Ist z.B. $\mathbf{K} = k\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k^\top$ ein Projektor auf eine Richtung \mathbf{e}_k , dann wird bei der Spurbildung diese Komponente der C-Matrix selektiert. Der Beitrag zur Stabilität aus der zeitverzögerten Kopplung ist dann etwa proportional zur Autokorrelationsfunktion der entsprechenden Komponente $a_k(t) = \mathbf{e}_k^\top \cdot \mathbf{a}(t)$ des Lyapunov-Vektors. Hier zeigt sich die wesentliche Voraussetzung für die Wirksamkeit von zeitverzögerter Kopplung. Stimmt der verzögerte Vektor \mathbf{a}_τ weitgehend mit dem instantanen Vektor \mathbf{a} überein, dann ist die Kopplung sehr wirksam und die Elemente der C-Matrix sind deutlich von Null verschieden. Ist infolge der Durchmischung im chaotischen Fluss die Kohärenz von $\mathbf{a}(t)$ endlich und τ so groß, dass die Autokorrelationsfunktion etwa den Wert Null erreicht, dann hat die Kopplung praktisch keinen Einfluss auf die Stabilität. Diese Eigenschaften werden in den folgenden Abschnitten im Einzelnen anhand von Beispielen und Grenzfällen untersucht.

4.2 Der Fall $\tau = 0$

Das vorgestellte Konzept ist auch für instantane Kopplung gültig. Man erhält

$$\Lambda = \Lambda'_0 - \text{Sp}(\mathbf{K}\mathbf{C}_0) .$$

Ist die Kopplung $\mathbf{K} = k\mathbf{1}$ diagonal, so lässt sich zeigen, dass die Lyapunov-Vektoren durch diese Kopplung nicht beeinflusst werden. Die Kopplungskraft wirkt stets zentral und damit bleibt die Winkeldynamik unverändert. Es ist also $\Lambda'_0 = \Lambda_0$. Auch die Spurbildung vereinfacht sich und es bleibt nur

$$\Lambda = \Lambda_0 - k ,$$

weil die C-Matrix die Eigenschaft hat, dass

$$\text{Sp}(\mathbf{C}_0) = 1 .$$

Das transversale Lyapunovspektrum ist das verschobene Spektrum eines freien Systems für alle Trajektorien. Deshalb ist auf diese Weise auch immer vollständige Synchronisation erreichbar, denn es gibt immer ein $k_s = \Lambda_0^{(\max)}$, so dass für $k > k_s$ der transversale Unterraum stabil ist.

Ist $\mathbf{K} = k\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k^\top$ ein Projektor, dann ist

$$\begin{aligned} \Lambda &= \Lambda'_0 - k \left\langle e_{vk}^2(t) \right\rangle_t \\ &= \Lambda'_0 - k \left\langle \frac{a_k^2(t)}{|\mathbf{a}(t)|^2} \right\rangle_t \end{aligned}$$

Hierbei ist

$$e_{vk} = \mathbf{e}_k^\top \cdot \mathbf{e}_v \leq 1 .$$

Die Kopplungsstärke wird also effektiv reskaliert, weil der Lyapunov-Vektor nicht immer genau in die Richtung der Kopplungskraft zeigt. Die diagonale Kopplung erreicht deshalb die beste Wirkung, weil sie alle möglichen Richtungen abdeckt.

4.2.1 Näherung unveränderter Lyapunov-Vektoren

Ähnlich wie für den Fall diagonalen Kopplung kann man für jede andere Kopplung annehmen, dass die Lyapunov-Vektoren des linearen Tangentialsystems mit Kopplung ähnlich denen des freien Systems sind, falls die Kopplungsstärke hinreichend klein ist. Daraus folgt direkt, dass man

$$\Lambda'_0 = \Lambda_0 \quad (4.7)$$

und zusätzlich

$$\mathbf{C}_\tau(\mathbf{K}) = \mathbf{C}_\tau(\mathbf{0}) \quad (4.8)$$

nähern kann. Die wesentliche Information über das zu erwartende Synchronisationsverhalten ist in der C-Matrix enthalten. Aus der Simulation des Diodenoszillators habe ich diese für den führenden Lyapunov-Vektor berechnet. Bei $\tau = 0$ ergibt sich

$$\mathbf{C}_0 = \begin{pmatrix} 0.407 & -0.033 & -0.001 \\ -0.033 & 0.494 & -0.045 \\ -0.001 & -0.045 & 0.099 \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Man erkennt, dass $\text{Sp}(\mathbf{C}_0) = 1$ ist. Darüber hinaus ist $\mathbf{C}_0 = \mathbf{C}_0^\top$, weil in der Definition (4.5) für $\tau = 0$ eine Symmetrie entsteht. Die Diagonalelemente sind jeweils wie der Wert einer Autokorrelationsfunktion zu verstehen, und die außerdiagonalen Elemente wie der Wert einer Kreuzkorrelationsfunktion zwischen den Komponenten des Lyapunov-Vektors. Durch die spezielle Normierung geben die Diagonalelemente an, wie groß im Zeitmittel die Projektion des Vektors auf die entsprechende Komponente ist. Der Lyapunov-Vektor $\mathbf{a}(t)$, der Gl. (4.9) zugrunde liegt, führt die meiste Zeit eine Rotation in den ersten beiden Komponenten aus, siehe Abb. 4.5. Die dritte Komponente zeigt eine Abfolge kurzer Pulse und ist ansonsten nahe Null. Das führt auch zu dem vergleichsweise niedrigen Wert des entsprechenden Matrixelements. Unter den Voraussetzungen (4.7) und (4.8) kann man für eine beliebige Kopplung $\mathbf{K} = k\mathbf{Q}$ den Exponenten abschätzen durch

$$\Lambda(k) = \Lambda_0 - \chi k, \quad (4.10)$$

wobei

$$\chi = \text{Sp}(\mathbf{Q}\mathbf{C}_0).$$

Die Schwelle zur vollständigen Synchronisation ist dann mit $\Lambda(k_c) = 0$ gegeben durch

$$k_c = \frac{\Lambda_0}{\chi}.$$

Abb. 4.1 zeigt den Verlauf von $\Lambda(k)$ für unterschiedliche Kopplungen. Die Näherung durch Gl. (4.10) stimmt weitgehend mit den numerischen Ergebnissen aus der Integration des vollen Systems (4.2) überein. Diagonale Kopplung ist am effektivsten für die Stabilisierung und die Synchronisationsschwelle wird bereits bei $k_c = \Lambda_0$ erreicht. Wird zur Kopplung ausschließlich die zweite Komponente benutzt, so gilt die Reskalierung der Kopplungskraft durch $\chi = 0.494$. Im Rahmen einer Bachelorarbeit wurde so mithilfe der Synchronisationsschwelle der Verlauf des größten Exponenten wie in Abb. 2.7 bestimmt [23]. Der Wert von χ ist dabei vergleichbar mit dem Wert des Entwicklungskoeffizienten η in Kap. 3, der etwa denselben Wert hat. Wird für die Kopplung schließlich nur die dritte Komponente verwendet, so bleibt der Einfluss auf die Stabilität wie erwartet sehr gering. Für größere Kopplungsstärken verliert die lineare Näherung (4.10) ihre Gültigkeit. Erfahrungsgemäß hat der Lyapunov-Vektor die Eigenschaft, bei einer starken einkomponentigen Kopplung in die verbleibenden ungekoppelten Richtungen auszuweichen. Dabei werden aber die Voraussetzungen (4.7) und (4.8) aufgehoben. Solche Eigenschaften wurden bereits von Pecora in einem sehr ähnlichen Rahmen untersucht [63], und für ein Rössler-ähnliches System galt bisher ein allgemeiner Konsens, dass eine Stabilisierung über die dritte Komponente nicht möglich ist. In der Tat entfernt sich auch bei dem von mir benutzten System $\Lambda(k)$ derart von dem erwarteten Trend, dass kein Übergang zur Synchronisation stattfindet.

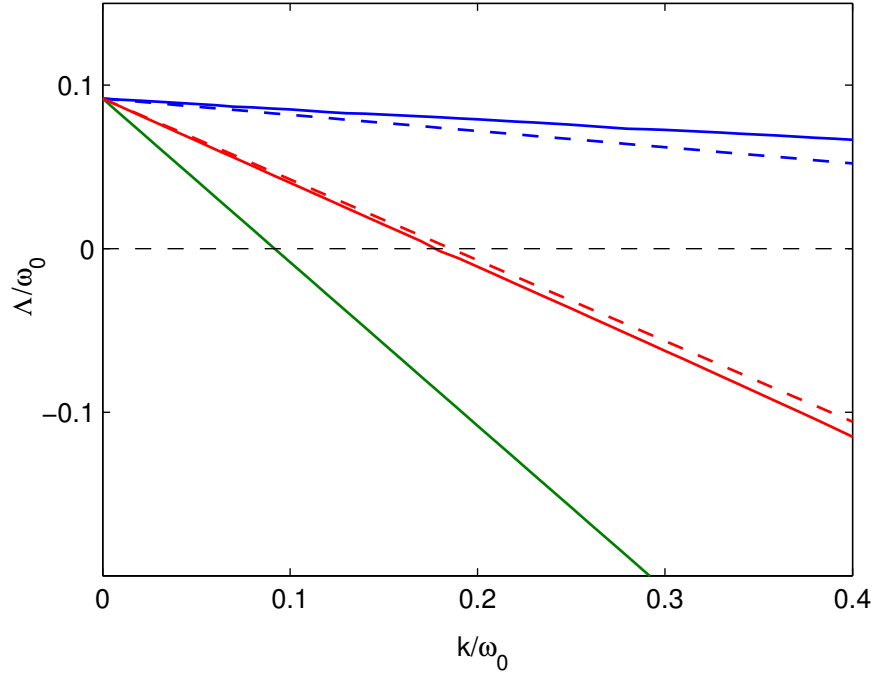


Abbildung 4.1: $\Lambda(k)$ für instantane Kopplung. Durchgezogene Linien: Numerische Simulation, gestrichelte Linien: Approximation durch Gl. (4.10). Grün: Diagonale Kopplung, rot: Kopplung nur in der zweiten Komponente, blau: Kopplung nur in der dritten Komponente.

4.2.2 Grenzwert $k \rightarrow \infty$

Für hinreichend große Kopplungsstärken kann sich die Dynamik im linearen Begleitsystem qualitativ ändern. Pecora zeigt am Beispiel zweier Rösslersysteme, die nur über die erste Komponente gekoppelt sind, dass für zu große Kopplungsstärken wieder eine Desynchronisation stattfindet [63]. In den frühen Arbeiten zur chaotischen Synchronisation [10, 47] wurde häufig eine Master-Slave Anordnung benutzt, bei der eine Komponente des getriebenen Systems vollständig durch die des Mastersystems ersetzt wurde. Diese Situation lässt sich auch als ein Spezialfall des Schemas (4.1) für $\tau = 0$ verstehen, bei dem der Grenzfall $k \rightarrow \infty$ für die entsprechende Komponente erreicht wird. In dieser Komponente wirkt dann praktisch eine unendliche Dissipation, die sie fest auf das Signal des Mastersystems fixiert. Der Fall sehr starker Kopplung kann auch für den Diodenoszillator untersucht werden. Im ungekoppelten Fall schreibt sich das lineare Tangentialsystem in Gln. (4.2) explizit

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 &= -c v_1 - v_2 - v_3 \\ \dot{v}_2 &= v_1 + (a - c) v_2 \\ \dot{v}_3 &= b \left(\frac{\partial}{\partial u_1} \Upsilon(u_1 - x_0 + \tfrac{1}{2} u_3) v_1 + \frac{\partial}{\partial u_3} \Upsilon(u_1 - x_0 + \tfrac{1}{2} u_3) v_3 \right) - g v_3.\end{aligned}$$

Das wesentliche Phänomen wird bei einer Kopplung in der ersten und dritten Komponente ersichtlich, d.h.,

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann werden $v_1(t) = v_3(t) = 0$ fixiert und die Lösung der verbleibenden Komponente ist

$$v_2(t) = \tilde{a}_2(t) e^{(a-c)t}$$

mit der Komponente des veränderten Lyapunov-Vektors $\tilde{a}_2(t) = \text{const.}$ Da $a > c$, ist das getriebene System trotz der vollständigen Substitution zweier Komponenten instabil und synchronisiert nicht vollständig auf das Mastersystem. Die Kriterien für Stabilität bei Substitution von Komponenten ergeben sich daher aus den Stabilitätseigenschaften des Systems im verbleibenden Unterraum.

4.2.3 Stabilisierung durch die dritte Komponente

Die Dynamik der Lyapunov-Vektoren lässt sich durch instantane Kopplung auch gezielt modifizieren. Gl. (4.6) kann man zunächst so interpretieren, dass sich der transversale Exponent Λ zusammensetzt aus einer Instabilität $\Lambda'_0 > 0$ und einem Kopplungsterm, der diese Instabilität kompensiert, wenn er einen hinreichend großen negativen Beitrag liefert. Im Folgenden zeige ich anhand einer Kopplung in der dritten Komponente des Diodenoszillators, dass eine Stabilisierung auch dadurch erfolgen kann, dass $\Lambda'_0 < 0$ ist, während der Kopplungsterm nicht zur Stabilisierung beiträgt. Dazu berechne ich aus Gln. (4.2) für $\tau = 0$ den transversalen Exponenten bei einer Kopplung

$$\mathbf{K} = k \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abb. 4.2 zeigt den Verlauf des transversalen Exponenten $\Lambda(k)$ unter dieser Kopplung. Zusätzlich habe ich aus dem resultierenden Lyapunov-Vektor $\tilde{\mathbf{a}}(t)$, der sich infolge der Kopplung von $\mathbf{a}(t)$ des frei laufenden Systems unterscheidet, die Beiträge durch $\Lambda'_0(k)$ und $\text{Sp}(\mathbf{K}\mathbf{C}_0(k))$ berechnet. In der Umgebung des Ursprungs verhält sich der Beitrag der Kopplung so, wie man es nach dem vorigen Abschnitt in linearer Näherung erwarten würde. Es ist nämlich $\chi \approx 0$ und damit ist keine Stabilisierung durch diese Kopplung zu erwarten. Mit zunehmender Kopplungsstärke verändert sich aber die Dynamik in $\tilde{\mathbf{a}}(t)$ derart, dass der Beitrag aus dem Antrieb $\mathbf{Df}(\mathbf{u})$ deutlich absinkt. $\Lambda'_0(k)$ nimmt dadurch so niedrige Werte an, dass sogar der zunehmend destabilisierend wirkende Beitrag der Kopplung kompensiert wird. Entgegen der vorherrschenden Meinung über Rössler-artige Systeme konnte ich hiermit zeigen, dass eine Stabilisierung der vollständigen Synchronisation ausschließlich mithilfe der dritten Komponente möglich ist. Es bleibt die Frage nach dem Mechanismus, der dieses Verhalten verursacht. Die Erklärung liegt in der Tatsache, dass es sich bei dem autonomen Diodenoszillator um ein dissipatives System handelt. Die am stärksten kontrahierende Richtung stimmt dabei für eine typische Trajektorie meistens mit der dritten Komponente überein. Der stabilisierende Effekt der nicht-diagonalen Kopplung entsteht dann aus einer Durchmischung der unterschiedlich expandierenden Richtungen während der Zeitentwicklung des Systems. Dieser Effekt tritt auch bei periodischen Orbits auf, wenn sie als Funktion eines Parameters die größtmögliche Stabilität erreichen. Analog zur Superstabilität periodischer Orbits der logistischen Abbildung findet man solche Punkte im Lyapunovspektrum in Abb. 2.7.

Die Wirkung der nicht-diagonalen Kopplung lässt sich explizit am Beispiel des trivialen Fixpunktes zeigen. Die Linearisierung der Umgebung stimmt meistens mit der einer typischen Trajektorie überein. Die Eigenwerte von $(\mathbf{Df}(\mathbf{0}) - \mathbf{K})$ sind in Abb. 4.3a über der komplexen Ebene dargestellt. Ausgehend von $k = 0$ ist die Verlagerung der Stabilität des einzelnen negativen Exponenten (grün) auf das komplex konjugierte Paar (rot und blau) zu erkennen. Abb. 4.3b zeigt den Verlauf der Realteile als Funktion von k . Der jeweils größte Exponent stimmt dabei sehr gut mit dem transversalen Exponenten $\Lambda(k)$ aus Abb. 4.2 überein.

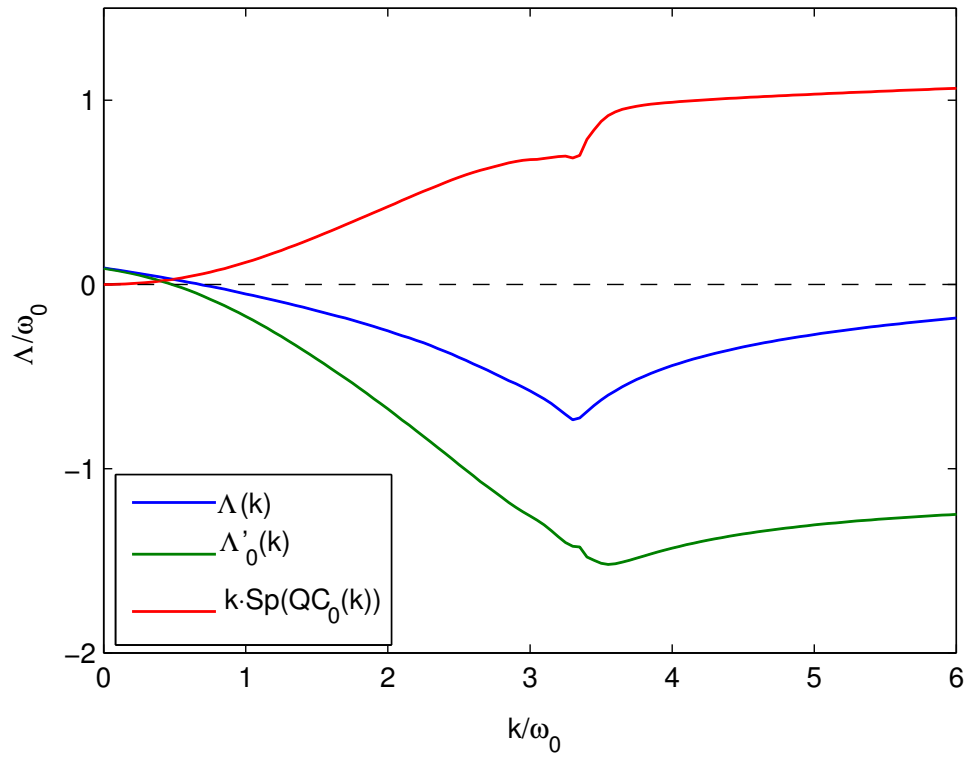


Abbildung 4.2: Beiträge zur Stabilität für nichtdiagonale Kopplung in der dritten Komponente. Der Beitrag des Kopplungsterms hat wie erwartet im Ursprung eine fast waagrechte Tangente.

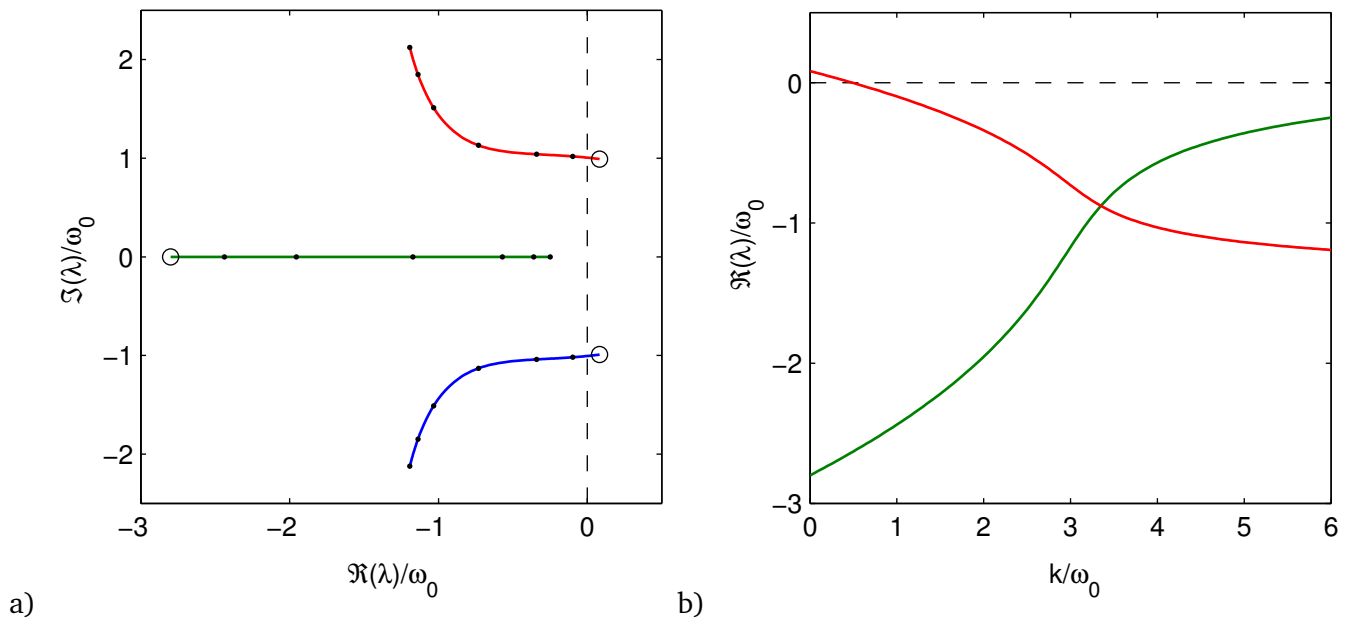


Abbildung 4.3: Eigenwerte der Linearisierung des trivialen Fixpunktes bei nichtdiagonaler Kopplung.

4.3 Approximation für kleine k

Für alle Verzögerungszeiten τ kann man die Näherung ansetzen, dass die Lyapunov-Vektoren infolge der Kopplung nicht wesentlich verändert werden, falls die Kopplungsstärke $k \approx 0$ ist. Das bedeutet, dass man $\Lambda'_0(\mathbf{K}, \tau) = \Lambda_0$ und $\mathbf{C}_\tau(\mathbf{K}) = \mathbf{C}_\tau(\mathbf{0})$ setzt. Dabei stellt sich die Frage, wie gut man durch diesen Ansatz den tatsächlichen Exponenten berechnen kann und bis zu welcher Kopplungsstärke diese Näherung Sinn macht. Das Konzept ist aus dem Grund besonders wertvoll, weil man aus den Eigenschaften eines einzelnen frei laufenden Systems in einem Schema wie Gln. (4.1) Aussagen über dessen Synchronisationsverhalten machen kann. Für eine gegebene Kopplungsmatrix $\mathbf{K} = k\mathbf{Q}$ gilt dann

$$\begin{aligned}\Lambda &= \Lambda_0 + k\chi e^{-\Lambda\tau} \\ \Rightarrow \Lambda &= \Lambda_0 + \tau^{-1}W(k\chi\tau e^{-\Lambda_0\tau}) .\end{aligned}\tag{4.11}$$

Die Funktion $W(\cdot)$ ist die Lambert-W-Funktion (siehe Anhang) und der Koeffizient χ ist gegeben durch

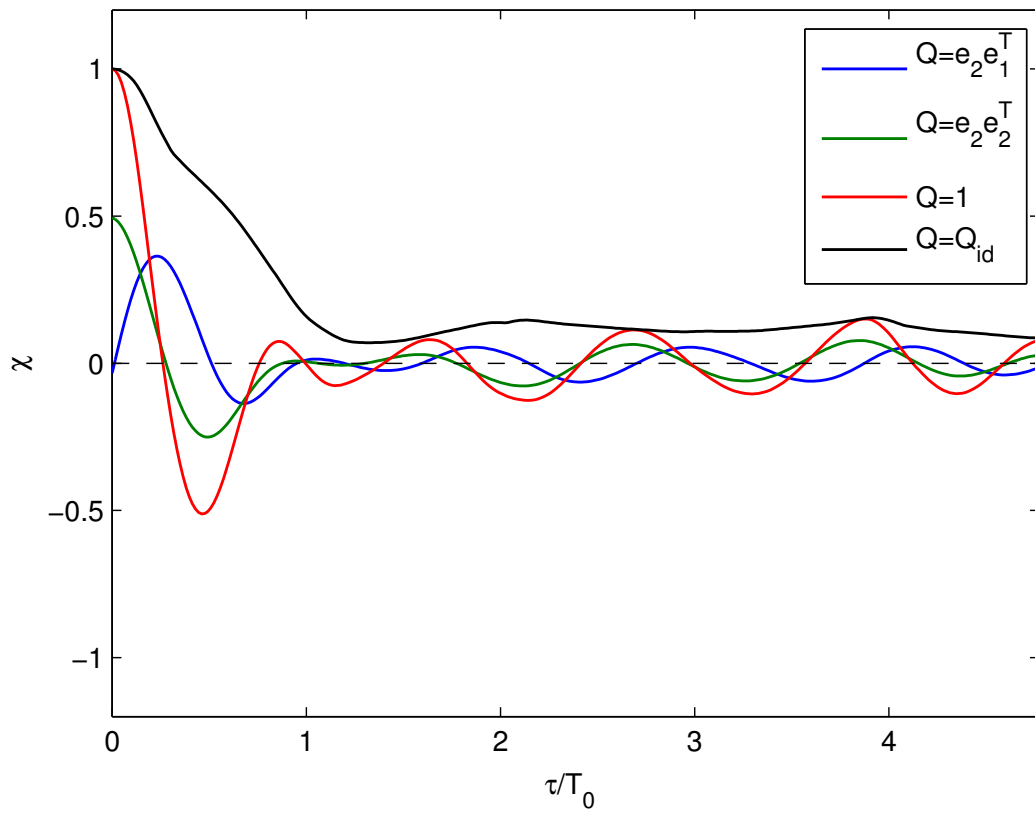
$$\chi = \text{Sp}(\mathbf{Q}\mathbf{C}_\tau) .$$

Ist \mathbf{Q} eine unitäre Matrix, so ist für $\tau = 0$ immer $|\chi| \leq 1$. Für $\tau \neq 0$ kann auch $|\chi| > 1$ sein, wenn die Länge des Lyapunov-Vektors starken Schwankungen unterliegt. Abb. 4.4a zeigt die typischen Werte von $\chi(\tau)$, die aus dem führenden² Lyapunov-Vektor im chaotischen Regime des Diodenoszillators gewonnen wurden. Als Beispiele wurden diagonale Kopplung $\mathbf{Q} = \mathbf{1}$, Projektionen auf einzelne Komponenten und eine ideale Kopplung \mathbf{Q}_{id} gewählt (siehe Anhang B.3.2). Für $\tau = 0$ erkennt man die Eigenschaften, die beim Abschätzen der Synchronisationsschwelle in Abs. 4.2.1 bereits eine Rolle gespielt haben. Der Lyapunov-Vektor rotiert meistens nur in der x - y -Ebene. Das verursacht die Oszillationen in den Matrixelementen. Es fällt auch auf, dass die Korrelation sehr schnell abfällt, was die zeitverzögerte Kopplung schließlich sehr ineffektiv macht. Abb. 4.4b zeigt die entsprechenden Funktionen $\chi(\tau)$ für die Nullmode. Diese spiegelt die Phaseneigenschaften des Systems wieder und zeigt daher im abgebildeten Zeitfenster keinen Korrelationszerfall. Die größtmöglichen Werte sind sogar größer Eins. Damit kann man auf starke Schwankungen in der Länge des Lyapunov-Vektors schließen. In der Tat wird die Trajektorie während eines Ausschlags der dritten Komponente stark beschleunigt und wieder abgebremst. Diese Eigenschaft schlägt sich direkt in der Nullmode nieder.

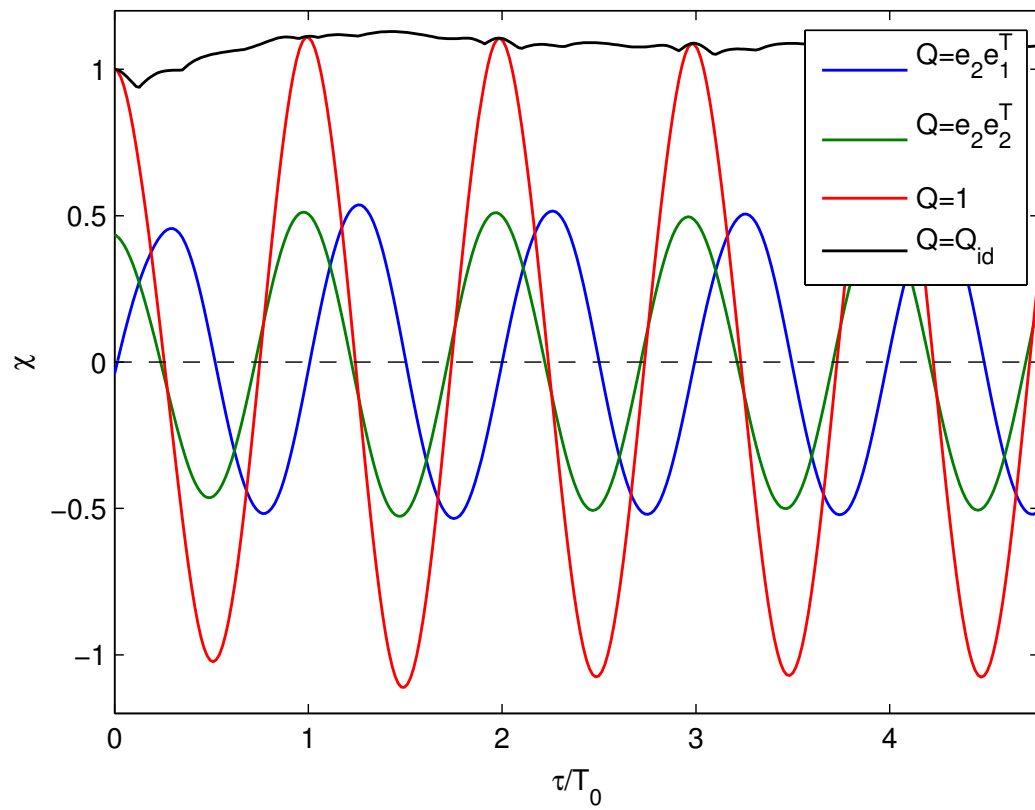
4.4 Stochastische Modellierung

Bisher wurde in sehr allgemeiner Form diskutiert, wie die Dynamik der Lyapunov-Vektoren sich auf die Stabilisierung der transversalen Koordinate auswirkt. Für kleine Verzögerungszeiten gilt in guter Näherung das Konzept von Pyragas [82], dass der verzögerte Vektor \mathbf{a}_τ durch eine konstante Drehung mithilfe einer Matrix $\mathbf{Q}(\tau)$ auf den instantanen Vektor \mathbf{a} abgebildet und so die Wirkung der Kopplung maximiert werden kann. In der Notation des letzten Kapitels bedeutet das, dass durch eine geschickte Wahl von \mathbf{Q} der Term $\text{Sp}(\mathbf{Q}\mathbf{C}_\tau)$ maximiert wird. Aus den Grafiken 4.4 und 4.14 erkennt man z.B. sogar, dass für eine Verzögerungszeit von $\tau = T_0/2$ die Matrix etwa den Wert $\mathbf{Q} = -\mathbf{1}$ annehmen muss, was einer Umkehrung des Vorzeichens der Kopplung entspricht. Im instantanen Fall würde diese Kopplung zusätzlich zur ursprünglichen Instabilität eine Destabilisierung der Synchronisationshyperebene bewirken. Im Zusammenspiel mit einer Zeitverzögerung und der intrinsischen Winkeldynamik der Systeme bewirkt sie aber genau das Gegenteil. Für Verzögerungszeiten, die deutlich über eine halbe Periodendauer hinausgehen, macht der Ansatz einer einfachen Rotation keinen Sinn mehr, wie der Verlauf der C-Matrixelemente zeigt. Die Autokorrelationsfunktionen der einzelnen Komponenten des führenden Lyapunov-Vektors zerfallen

² Der 'führende' oder 'erste' Lyapunov-Vektor ist der zum größten Lyapunovexponenten gehörende Lyapunov-Vektor. Entsprechend gilt die nummerierte Notation auch für die weiteren Lyapunov-Vektoren des Spektrums.



a)



b)

Abbildung 4.4: a) Verlauf von χ aus der C-Matrix für den größten Exponenten. b) χ aus der C-Matrix der Nullmode.

vergleichsweise schnell. Der Mechanismus des Korrelationszerfalls ist zwar anschaulich gut mit dem turbulenten Verhalten einer chaotischen Trajektorie in Verbindung zu bringen. Die detaillierten Aspekte entbehren bisher aber einer geeigneten theoretischen Grundlage. In diesem Abschnitt soll daher anhand einer Vereinfachung der Bewegungsgleichungen des Diodenoszillators ein Modell für die Dynamik der Lyapunov-Vektoren in diesem System extrahiert werden. Damit kann der Ansatz (4.11) und schließlich auch die Voraussage des Synchronisationsverhaltens verfeinert werden.

4.4.1 Diskrete Abbildungen

Eine eindimensionale diskrete Abbildung sei durch

$$x_{n+1} = M(x_n) \quad (4.12)$$

gegeben, wobei $M : [0, 1] \mapsto [0, 1]$ eine nichtlineare Funktion auf dem Einheitsintervall ist. Beliebte Beispiele sind die logistische, die Zelt- und die Bernoulli-Abbildung. Das lineare Tangentialsystem der Abbildung ist mit $M'(x) = dM/dx$

$$\delta x_{n+1} = M'(x_n) \delta x_n$$

und die Störung lässt sich durch einen Lyapunov-Vektor³ ausdrücken:

$$\delta x_n = a_n \mu^n = a_n e^{n \Delta t} .$$

Dabei ist Δt der Zeitschritt der Abbildung und für den Multiplikator gilt

$$\mu = \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt[N]{\prod_{n=1}^N |M'(x_n)|} .$$

Der Lyapunov-Vektor lässt sich direkt schreiben als

$$a_{n+1} = \mu^{-1} M'(x_n) a_n .$$

Die Abbildungen

$$M(x) = 2x \mod 1 \quad (4.13)$$

$$M(x) = 1 - 2 \left| x - \frac{1}{2} \right| \quad (4.14)$$

$$M(x) = 4x(1 - x) \quad (4.15)$$

haben alle einen Multiplikator von $\mu = 2$. Das Vorzeichen des Lyapunov-Vektors bildet für die logistische und die Zeltabbildung eine Sequenz von Zufallszahlen und ist jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $p = 1/2$ positiv oder negativ. Für die Bernoulliabbildung ist $a_n = a_0$ wegen der konstanten Steigung. Für die Zeltabbildung ist $a_n = \pm a_0$ und für die logistische Abbildung bilden die Werte von a_n eine kontinuierliche Verteilung, die symmetrisch um Null ist. Die C-Matrix lässt sich auch für den Fall der diskreten Abbildungen definieren und ist für die Verzögerungszeit $\tau = m \Delta t$ eine Zahl

$$C_m = \left\langle \frac{a_n a_{n-m}}{a_n^2} \right\rangle_n = \left\langle \frac{a_{n-m}}{a_n} \right\rangle_n ,$$

³ Ich benutze die Bezeichnung 'Vektor' wegen der Analogie zum $\mathbf{a}(t) \in \mathbb{R}^N$, auch wenn $a_n \in \mathbb{R}$ ist.

die das Verhältnis des verzögerten Vektors zum instantanen Wert ausdrückt. Für den Lyapunov-Vektor eines freien Systems wird dieser Ausdruck zu

$$C_m = \left\langle \frac{\mu^m}{\prod_{j=1}^m M'(x_{n-j})} \right\rangle_n \quad (4.16)$$

und $C_0 = 1$. Da die Abbildungen (4.13) bis (4.15) ergodisch sind, kann man die C-Matrix mithilfe relativer Häufigkeiten aus den invarianten Dichten berechnen. Für die Bernoulliabbildung ist

$$C_m = 1 \quad \forall m,$$

was eine Folge der konstanten Steigung ist. Für die Zeltabbildung und die logistische Abbildung ist

$$C_m = \delta_{m,0}. \quad (4.17)$$

Die Korrelationsfunktion der Lyapunov-Vektoren zerfällt innerhalb eines Zeitschrittes infolge der zufälligen Vorzeichenwechsel von $M'(x_n)$. Im Falle der Zeltabbildung ist das direkt ersichtlich, da zum Mittelwert in Gl. (4.16) mit gleicher Häufigkeit der Wert $+1$ wie -1 beiträgt. Das Ergebnis erinnert stark an den Verlauf der Matricelemente in Abb. 4.4, wenn man den Zeitschritt Δt mit der Periodendauer T_0 gleichsetzt. Der Vergleich ist berechtigt, denn in Kap. 2 wurde gezeigt, dass sich die Dynamik innerhalb einer Zyklusdauer im Wesentlichen in einer diskreten Abbildung zusammenfassen lässt, die der logistischen oder der Zeltabbildung sehr ähnlich ist.

4.4.2 Lyapunov-Vektoren des Diodenoszillators

Die wesentliche Eigenschaft in der Dynamik des führenden Lyapunov-Vektors wird aus dem zeitlichen Verlauf seiner zweiten Komponente ersichtlich. Abb. 4.5 zeigt einen Ausschnitt aus Zeitreihen einer typischen chaotischen Trajektorie $\zeta(t)$ und deren führendem Lyapunov-Vektor $\mathbf{a}(t)$. Solange die Trajektorie sich in der Nähe des Fixpunktes befindet, ist außer dem linearen Tangentialsystem auch das Hauptsystem effektiv nur linear. Die Komponente $a_2(t)$ vollzieht in dieser Zeit eine harmonische Schwingung. Beim Einsetzen der Nichtlinearität wird der Rückfaltprozess durch einen kurzen Puls in der dritten Komponente in Gang gesetzt. Dabei erfährt die Umgebung der Trajektorie eine π -Torsion. Dies macht sich im linearen Tangentialsystem durch einen Vorzeichenwechsel der harmonischen Schwingung von $a_2(t)$ bemerkbar, der jeweils an den Stellen der Pulse der dritten Komponente zu finden ist. Der Vorzeichenwechsel entspricht genau demjenigen des Lyapunov-Vektors a_n der diskreten Abbildungen, wenn die Trajektorie einen Bereich mit $M'(x_n) < 0$ passiert. Das Bild wird durch den Zusammenhang zwischen Nichtlinearität und Umkehrabbildung in Kapitel 2 vervollständigt.

4.4.3 Stochastisches Modell

Eine diskrete Abbildung (4.12) lässt sich auf ein kontinuierliches System erweitern. Man kann so vereinfachte Differentialgleichungen erstellen, die die wesentlichen Eigenschaften des ursprünglichen Systems gut wiedergeben und sich darüber hinaus analytisch diskutieren lassen. Für den Diodenoszillator ist die am besten geeignete Minimalform eine periodisch gestoßene instabile Spirale

$$\dot{z} = (\lambda_0 + i\omega_0)z + b_n \delta(t - \underbrace{nT_0}_{t_n}) \quad (4.18)$$

mit $z \in \mathbb{C}$, $b_n \in \mathbb{R}$, $T_0 = 2\pi/\omega_0$ und $\lambda_0 + i\omega_0$ wie in der Stabilitätsanalyse des Fixpunktes in Kap. 3.3. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit starte das System bei $t = 0$ mit $z = x'_0 > 0$. Dann bewirkt jeder

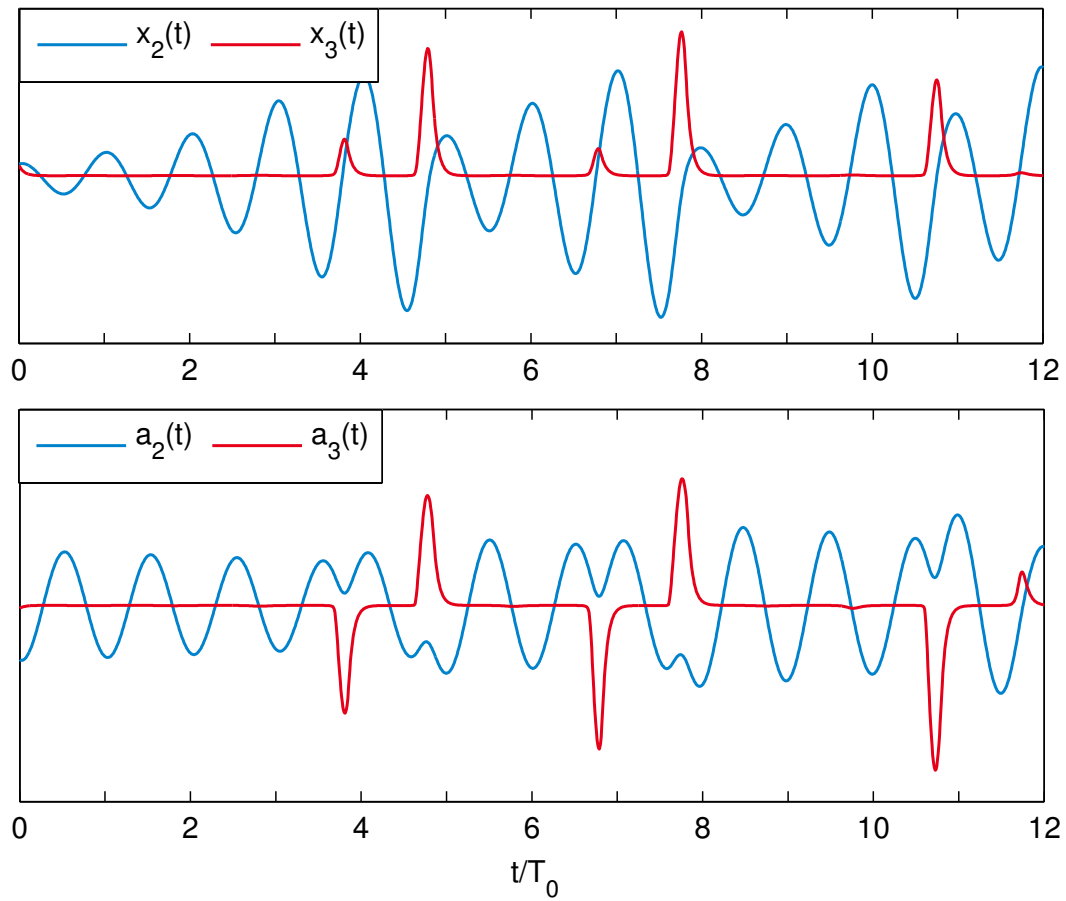


Abbildung 4.5: Oben: Zeitreihen der Systemtrajektorie $\zeta(t)$. Unten: Komponenten des führenden Lyapunov-Vektors $a(t)$ dieser Trajektorie.

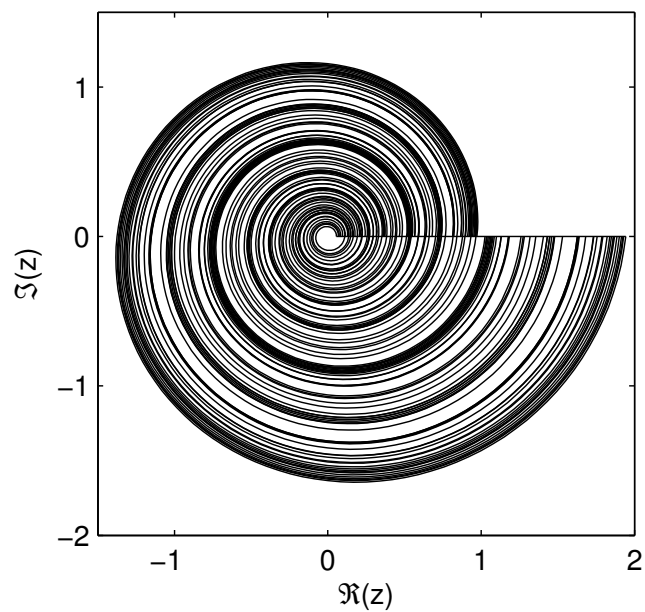


Abbildung 4.6: Vereinfachtes Modellsystem.

Stoß genau eine Verschiebung entlang der reellen Achse. Sei $x_n \in \mathbb{R}$ der reelle Wert der Trajektorie unmittelbar vor dem n -ten Stoß und $x'_n \in \mathbb{R}$ unmittelbar danach

$$\begin{aligned} x'_n &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} x(t_n + \epsilon) \\ x_n &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} x(t_n - \epsilon), \end{aligned}$$

wobei $\epsilon > 0$. Dann gilt infolge der Spiralbewegung zwischen zwei Stößen

$$x_{n+1} = x'_n e^{\lambda_0 T_0} := \mu_0 x'_n.$$

Die Stoßstärken b_n seien so definiert, dass die diskrete Abbildung ausgeführt wird:

$$\begin{aligned} x'_{n+1} &= M(x'_n) \\ \Rightarrow x_{n+1} &= \mu_0 M\left(\frac{x_n}{\mu_0}\right) \\ \Rightarrow x'_n &= M\left(\frac{x_n}{\mu_0}\right). \end{aligned}$$

Da $b_n = x'_n - x_n$, ist

$$b_n = M\left(\frac{x_n}{\mu_0}\right) - x_n.$$

Das einfachste Beispiel, das auch für den Diodenoszillator in guter Näherung zutrifft, ist die Wahl einer Rampenfunktion mit einer Schwelle $x_s > 0$

$$b_n = -2\Upsilon(x_n - x_s).$$

Daraus folgt eine Zeltabbildung

$$M(z) = x_s - \mu_0 \left| z - \frac{x_s}{\mu_0} \right|.$$

Abb. 4.6 zeigt die Trajektorie in der komplexen Ebene für $x_s = 1$ und $\mu = 2$. Die Dynamik ist dann vollkommen äquivalent zu der der voll entwickelten Zeltabbildung (4.14). Für diesen Fall lassen sich auch problemlos die Lyapunov-Vektoren berechnen. Sei $\zeta(t)$ eine Trajektorie des Systems. Für den führenden Lyapunov-Vektor lässt sich dann schreiben

$$a(t) = \frac{x}{|x|} \cdot \sigma(t),$$

wobei $\sigma(t) \in \{-1, +1\}$ genau dann das Vorzeichen wechselt, wenn ein Puls mit $b_n \neq 0$ stattfindet. Der Imaginärteil $\Im(a(t))$ bildet dann eine stückweise harmonische Schwingung, die eine Abstraktion der Zeitreihe $a_2(t)$ in Abb. 4.5 darstellt.

Werden zwei Oszillatoren vom Typ der Gl. (4.18) nach dem Schema (4.1) gekoppelt, so nimmt nach der üblichen Transformation die transversale Gleichung die Form

$$\dot{v} = (\lambda_0 + i\omega_0)v + \beta_n \delta(t - t_n) - \kappa v_\tau \quad (4.19)$$

an, wobei die Pulsstärke β_n zunächst von x_n und v_n abhängt. Letzteres ist analog zu x_n definiert. Es ist zwar ohne Weiteres möglich, einen allgemeinen expliziten Ausdruck für β_n herzuleiten. Dazu müsste man aber vorübergehend auf die kompakte Darstellung der komplexen Schreibweise verzichten. Die

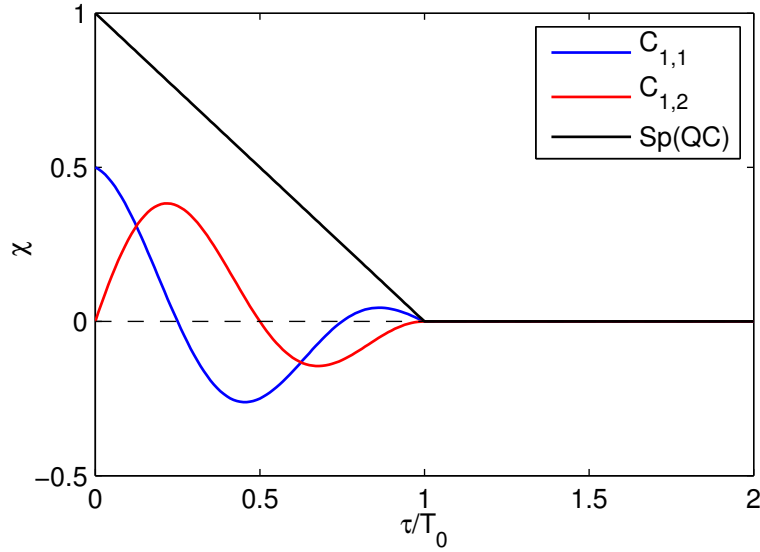


Abbildung 4.7: C-Matrix des vereinfachten Modells (vergl. Abb. 4.4a).

Ergebnisse tragen auch nicht zur Erklärung der wesentlichen Mechanismen bei. Deshalb beschränke ich die Diskussion auf den Fall der idealen Phasendifferenz-kompensierenden Kopplung (PDK-Kopplung⁴). Die Kopplung ist dann

$$\kappa = k e^{i\omega_0 \tau}$$

und für das betrachtete Modellsystem wirkt damit die zeitverzögerte Kopplungskraft stets zentral auf den führenden Lyapunov-Vektor, so dass dieser zwar in seiner Länge, aber nicht in seiner Richtung beeinflusst wird. Ist die Differenzgröße ν unter PDK-Kopplung entlang dieses Lyapunov-Vektors ausgerichtet, so ist mit der Heaviside-Funktion $H(\cdot)$

$$\beta_n = -2\nu_n H(x_n - x_s).$$

Das bedeutet, dass unabhängig von der Kopplung der Vorzeichenwechsel bei $t = t_n$ stattfindet, sobald $x_n > x_s$. Projiziert man durch Multiplikation mit $e_\nu = \nu^*/|\nu|$ auf den Einheitsvektor, dann ergibt sich für die Länge $r = |\nu|$ die Gleichung

$$\dot{r} = \lambda_0 r - k \sigma_\tau \sigma r_\tau. \quad (4.20)$$

Hierbei werden die Vorzeichenwechsel wie oben für den Lyapunov-Vektor durch $\sigma(t)$ berücksichtigt. Hat innerhalb der Zeit τ kein Vorzeichenwechsel stattgefunden, weil hinreichend lange $x_n < x_s$ gewesen ist, dann ist $\sigma_\tau \sigma = 1$ und die verzögerte Größe hat das richtige Vorzeichen für die Kompensation des Abstandsvektors. Ansonsten ist $\sigma_\tau \sigma = -1$ und die zeitverzögerte Kopplungskraft wirkt destabilisierend. Das ist der wesentliche Mechanismus hinter der verminderten Effizienz der zeitverzögerten Kopplung für große Verzögerungszeiten. Kommen beide Vorzeichen etwa gleich häufig vor, so entspricht das einer C-Matrix von $C_\tau = 0$, und die Kopplung ist vollkommen unwirksam. Für das Modellbeispiel hat der führende Lyapunov-Vektor des freien Systems nämlich die Eigenschaft

$$C_\tau = \langle \sigma(t) \sigma(t - \tau) \rangle_t e^{-i\omega_0 \tau}.$$

Die PDK-Kopplung kann hiermit auch so verstanden werden, dass sie den rotierenden Term in der C-Matrix aufhebt und so den Beitrag zum Lyapunovexponenten maximiert.

⁴ Phase-lag compensating coupling nach Pyragas [82]

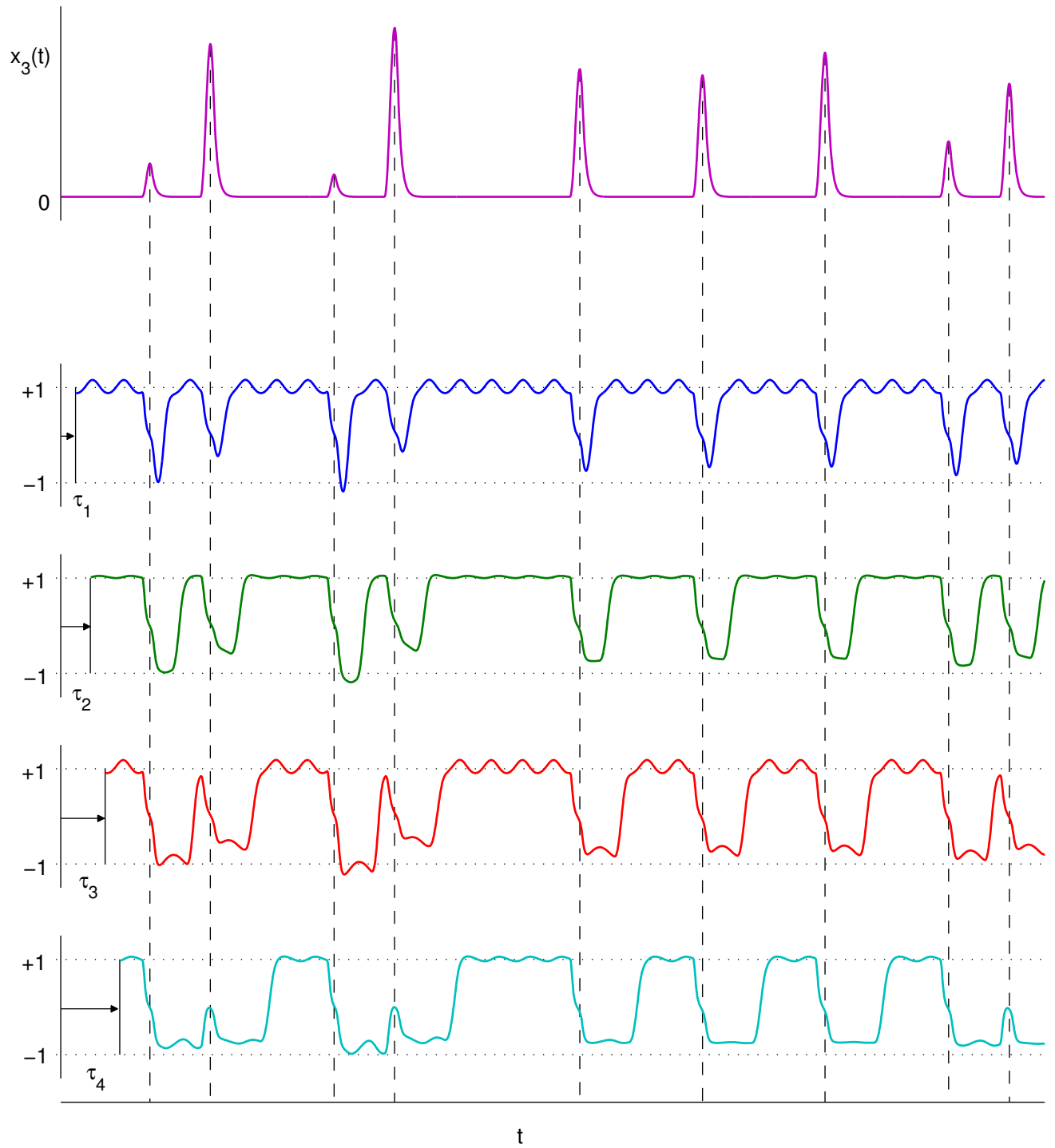


Abbildung 4.8: Zeitlicher Verlauf der Projektion eines konstant gedrehten Lyapunov-Vektors $Qa(t - \tau)$ auf den instantanen Vektor $a(t)$.

Ziel der weiteren Analyse ist es, für das Modellsystem das Wechselspiel zwischen der Zeitverzögerung und den stochastischen Sprüngen in $\sigma(t)$ genauer zu betrachten und so eine Beschreibung des Lyapunov-exponenten zu geben, wie er aus Gl. (4.20) erzeugt wird. Es handelt sich hierbei um ein hochgradig nichttriviales Problem, zu dem keine Standardmethoden für die Herangehensweise bekannt sind. Ich zeige deshalb zuerst einige Spezialfälle, bei denen das Produkt $\sigma_\tau \sigma$ durch einen beliebigen dichotomen stochastischen Prozess $s(t)$ ersetzt wird. Dieser soll für einen gegebenen Wert von τ die Eigenschaft haben, dass mit $c_\tau = |C_\tau|$ gilt

$$\begin{aligned} P(s(t) = +1) &= \frac{1 + c_\tau}{2} := p \\ P(s(t) = -1) &= \frac{1 - c_\tau}{2} := q, \end{aligned} \quad (4.21)$$

wobei $q = 1 - p$. Ein weiteres Merkmal von $s(t)$ seien die Verweildauerverteilungen in den beiden Zuständen $h_+(\theta_+)$ und $h_-(\theta_-)$, so dass mit den mittleren Verweildauern $\langle \theta_+ \rangle$ und $\langle \theta_- \rangle$ gilt

$$\begin{aligned} p &= \frac{\langle \theta_+ \rangle}{\langle \theta_- \rangle + \langle \theta_+ \rangle} \\ q &= \frac{\langle \theta_- \rangle}{\langle \theta_- \rangle + \langle \theta_+ \rangle}. \end{aligned}$$

Für die Analyse der Gleichung

$$\dot{r} = \lambda_0 r - ks(t)r_\tau \quad (4.22)$$

wird zunächst durch r dividiert, um die logarithmische Zuwachsrates $\lambda(t)$ zu erhalten

$$\lambda(t) = \lambda_0 - ks(t)e_\tau(t),$$

die im Mittel den gesuchten Exponenten Λ ergibt

$$\Lambda = \lambda_0 - k\langle s(t)e_\tau(t) \rangle_t, \quad (4.23)$$

wobei $e_\tau = \frac{r_\tau}{r}$ ist. Da sich e_τ wiederum aus der Zeitentwicklung von $\lambda(t)$ ergibt, kann man schreiben

$$\lambda(t) = \lambda_0 - ks(t) \underbrace{\exp \left[- \int_{t-\tau}^t \lambda(t') dt' \right]}_{e_\tau}. \quad (4.24)$$

Der Spezialfall, dass $s(t) = \text{const}$, führt hierbei dazu, dass $\lambda(t) \equiv \Lambda = \text{const}$, und liefert somit den üblichen Term $\exp(-\Lambda\tau)$. Für das weitere Vorgehen ist es hilfreich, eine Fallunterscheidung zu machen mit den Hilfsexponenten

$$\begin{aligned} \lambda_+ &= \lambda_0 - ke_\tau \\ \lambda_- &= \lambda_0 + ke_\tau. \end{aligned}$$

Diese sind entsprechend jeweils nur für diejenigen Zeiten definiert, in denen $s(t) = +1$ für λ_+ und $s(t) = -1$ für λ_- . Der Zeitmittelwert in Gl. (4.23) lässt sich dann zerlegen, so dass

$$\Lambda = p\langle \lambda_+ \rangle + q\langle \lambda_- \rangle. \quad (4.23')$$

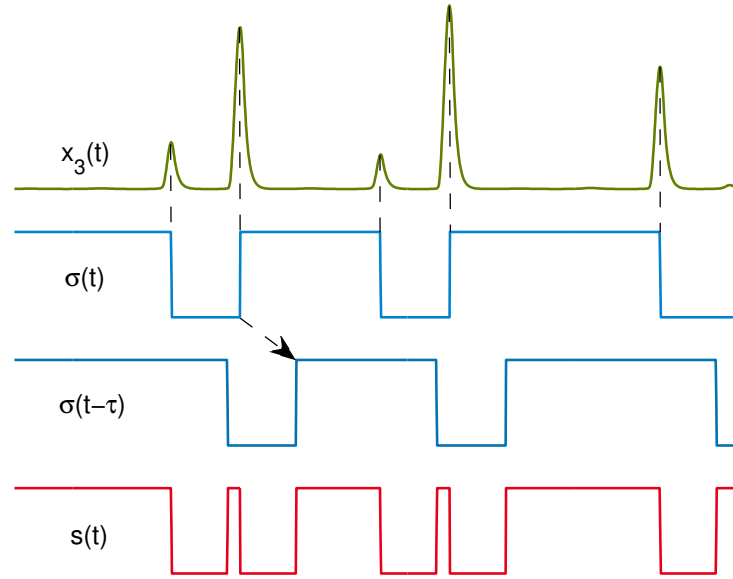


Abbildung 4.9: Konstruktion des stochastischen Prozesses $s(t)$ am Beispiel einer Zeitreihe des Diodenoszillators (vergl. Abb. 4.8). Die Ausschläge der dritten Komponente entsprechen den δ -Stößen im vereinfachten Modell.

Grenzfall $\tau \gg \langle \theta_+ \rangle, \langle \theta_- \rangle$:

Finden die Vorzeichenwechsel in $s(t)$ auf einer sehr viel schnelleren Zeitskala als der der Verzögerungszeit statt, dann bildet das Integral in Gl. (4.24) schon innerhalb der Zeit τ einen Mittelwert über die schnell fluktuierenden Zuwachsraten, so dass

$$\int_{t-\tau}^t \lambda(t') dt' = \Lambda \tau .$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \lambda_+ &= \lambda_0 - k e^{-\Lambda \tau} \\ \lambda_- &= \lambda_0 + k e^{-\Lambda \tau} \end{aligned}$$

und Λ kann direkt durch die transzendente Gleichung

$$\Lambda = \lambda_0 + (q - p)k e^{-\Lambda \tau}$$

bestimmt werden. Berücksichtigt man dabei, dass wegen Gln. (4.21) $p - q = c_\tau$ ist, dann ist

$$\Lambda = \lambda_0 + \tau^{-1} W \left(-c_\tau k \tau e^{-\lambda_0 \tau} \right) . \quad (4.25)$$

In diesem Fall wird also die Kopplungsstärke durch c_τ reskaliert. Damit ist $c_\tau = \chi$, dem allgemeinen Entwicklungskoeffizienten. Die Entwicklung der Funktion $\Gamma(\cdot)$ aus Gln. (4.4) ist unter diesen Bedingungen exakt.

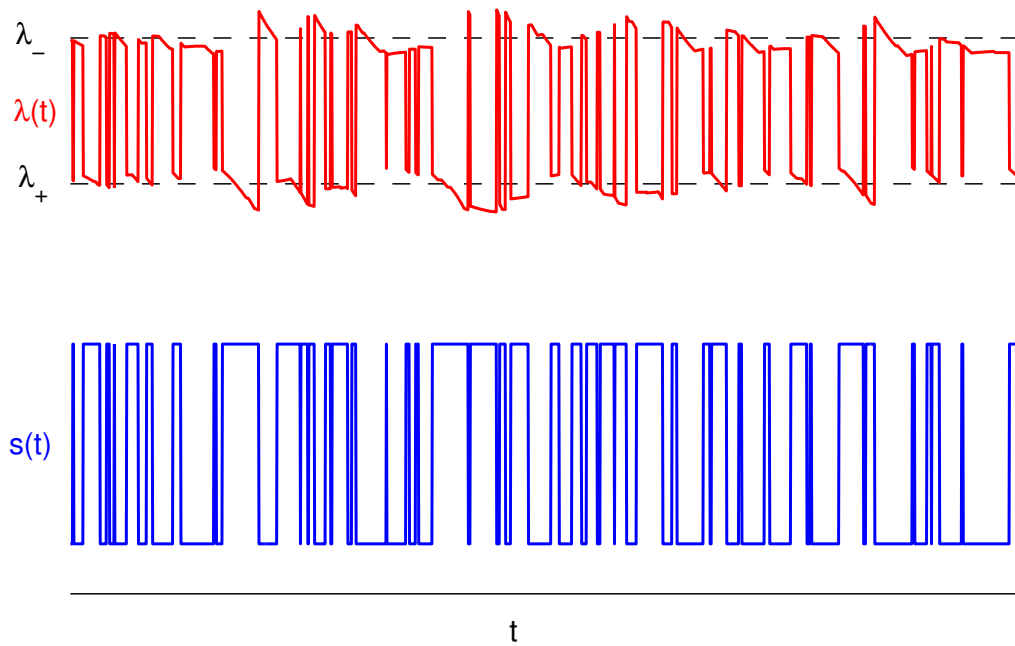


Abbildung 4.10: $\lambda(t)$ für schnelle Sprungdynamik.

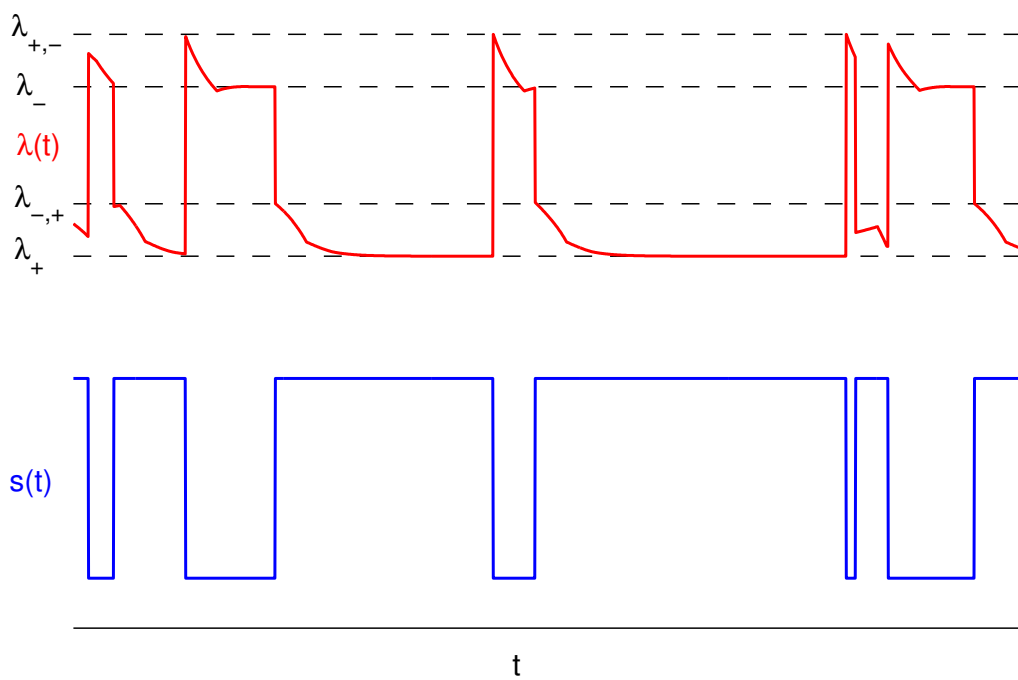


Abbildung 4.11: $\lambda(t)$ für langsame Sprungdynamik.

Grenzfall $\tau \ll \langle \theta_+ \rangle, \langle \theta_- \rangle$:

Ist die Verzögerungszeit sehr viel kürzer als die typischen Verweildauern der stochastisch wechselnden Kopplung, so kann man die adiabatische Näherung ansetzen

$$\begin{aligned}\lambda_+ &= \lambda_0 - k e^{-\lambda_+ \tau} \\ \lambda_- &= \lambda_0 + k e^{-\lambda_- \tau},\end{aligned}\tag{4.26}$$

d.h., das Vorzeichen von $s(t)$ bleibt lange genug konstant, dass das lineare Tangentialsystem auf seiner instabilsten Mode relaxieren kann. Damit folgt

$$\Lambda = \lambda_0 + \frac{p}{\tau} W(-k\tau e^{-\lambda_0 \tau}) + \frac{q}{\tau} W(+k\tau e^{-\lambda_0 \tau}).$$

Das Ergebnis unterscheidet sich für $c_\tau \approx 0$ deutlich von dem des anderen Grenzfalles, insbesondere in der Position des stabilsten Punktes in k .

Grenzfall $k \approx 0$

Ist die Kopplungsstärke hinreichend klein, dann gilt wegen $W'(0) = 1$ für die oben genannten Beispiele

$$\Lambda = \lambda_0 - \chi k e^{-\lambda_0 \tau}.\tag{4.27}$$

Die C-Matrix des Modells entspricht dem Entwicklungskoeffizienten χ . Für größere k kann sie keine Aussagen darüber liefern, an welcher Stelle die größte Stabilität erreicht wird und bei welchem Wert von k ein Stabilitätsgebiet endet.

Heuristik

Die Ergebnisse der unterschiedlichen Ansätze für den Exponenten der Gl. (4.22) sind in Abb. 4.12 gezeigt. Alle Kurven unterscheiden sich für positive k im Wesentlichen in der Ausdehnung des Stabilitätsbereiches. Für $k \approx 0$ stimmen alle in linearer Näherung überein und es gilt Gl. (4.27). Die Abschätzung des Zwischenbereichs (siehe Anhang B.3.1) ist diejenige, die für die typischen Kopplungsparameter wahrscheinlich am besten das tatsächliche Verhalten wiedergibt. Versuchsweise kann man dafür wiederum eine Faustregel verwenden, um das komplizierte Verfahren zu umgehen. Die Funktion

$$\Lambda \approx \lambda_0 + \frac{\chi}{\tau} W(-k\tau e^{-\lambda_0 \tau}).\tag{4.28}$$

ist ebenfalls in Abb. 4.12 gezeigt und man sieht, dass die Näherung hinreichend gut ist, wenn man λ_0 mit dem freien Lyapunovexponenten Λ_0 identifiziert. So ist mithilfe der C-Matrix des führenden Lyapunov-Vektors aus einem freien System eine Abschätzung des zu erwartenden Exponenten möglich. Die Matricelemente für die C-Matrix aus dem verwendeten Modell sind in Abb. 4.7 dargestellt. Die Übereinstimmung mit Abb. 4.4 zeigt, dass das Modell die wesentlichen Eigenschaften des Diodenoszillators wiedergibt. Außerdem sieht man die Analogie zu Gl. (4.17) der diskreten Zeltabbildung.

4.5 Vorhersage der Synchronisationseigenschaften

Man kann mit der C-Matrix und den gewonnenen Näherungsverfahren die Gebiete möglicher vollständiger Synchronisation rekonstruieren, indem man alle diejenigen Parameterkombinationen markiert, für die nach der Abschätzung (4.11) $\Lambda < 0$ ist. In Abb. 4.14a sind die experimentellen Ergebnisse für das Kopplungsschema (4.1) gezeigt. Aufgetragen ist die mittlere Differenz $\Delta(k, \tau)$ der Signale als Maß für den Grad der Synchronisation. Daneben zeigt Abb. 4.14b die mit der C-Matrix gewonnene Abschätzung. Diese gibt die Strukturen aus dem Experiment gut wieder. Die Methode lässt sich auch auf die Situation

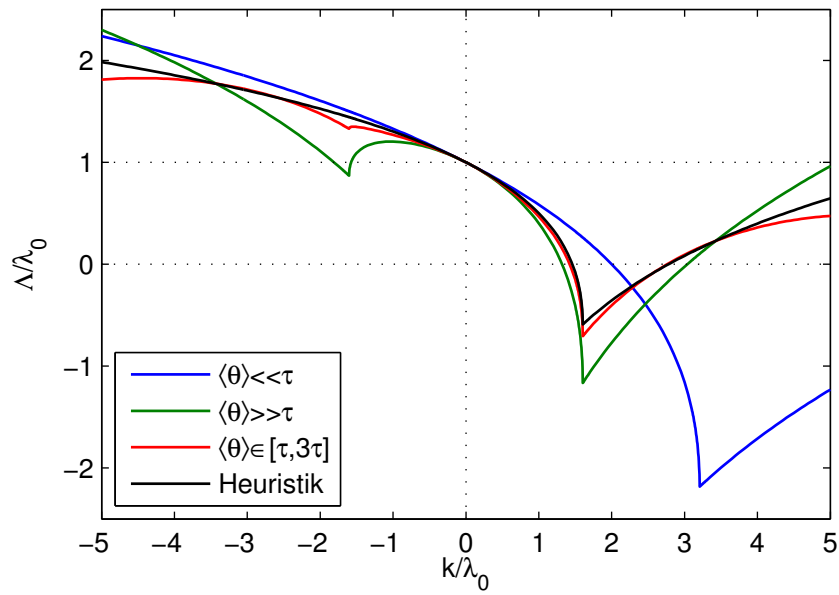


Abbildung 4.12: Die unterschiedlichen Approximationen für $\Lambda(k)$ des linearen Tangentialsystems (4.22) bei $\chi = 0.5$, $\tau = \pi$. Für die Kurve bei mittleren Verweildauern siehe Anhang B.3.1.

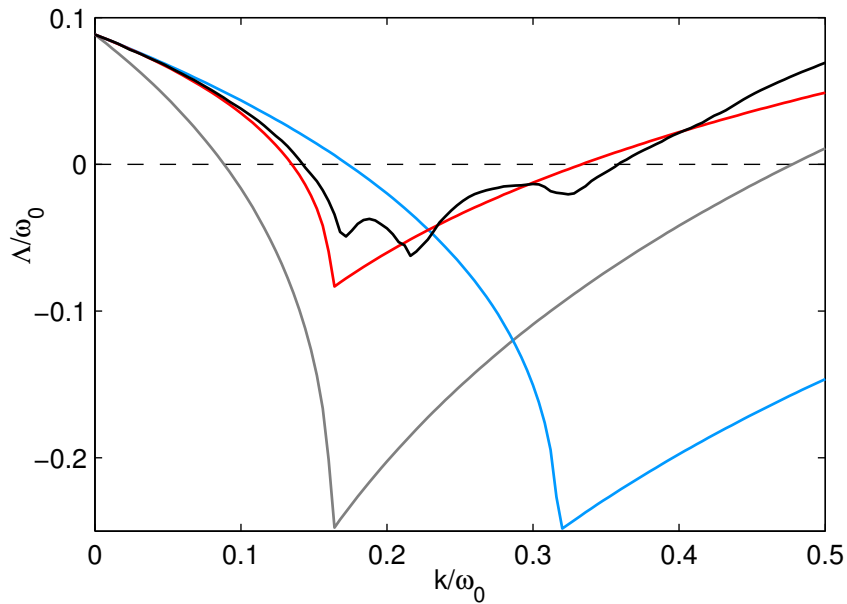


Abbildung 4.13: Unterschiedliche Approximationen für den maximalen Lyapunovexponenten bei $\tau = T_0/2$ und $Q = -1$, damit ist $\chi = 0.511$. Schwarz: Verlauf nach numerischer Simulation. Rot: Abschätzung mit Heuristik (4.28). Der Exponent der Simulation wird gut wiedergegeben. Blau: Abschätzung durch Reskalierung von k nach Gl. (4.25). Nahe $k = 0$ stimmt das erwartete Verhalten, aber für große k gibt es deutliche Abweichungen. Grau: Abschätzung mit $\chi = 1$ wie für ein zeitunabhängiges System. Die Werte weichen deutlich von der numerischen Kurve ab und es wird deutlich stabilere Dynamik vorhergesagt, als man tatsächlich vorfindet.

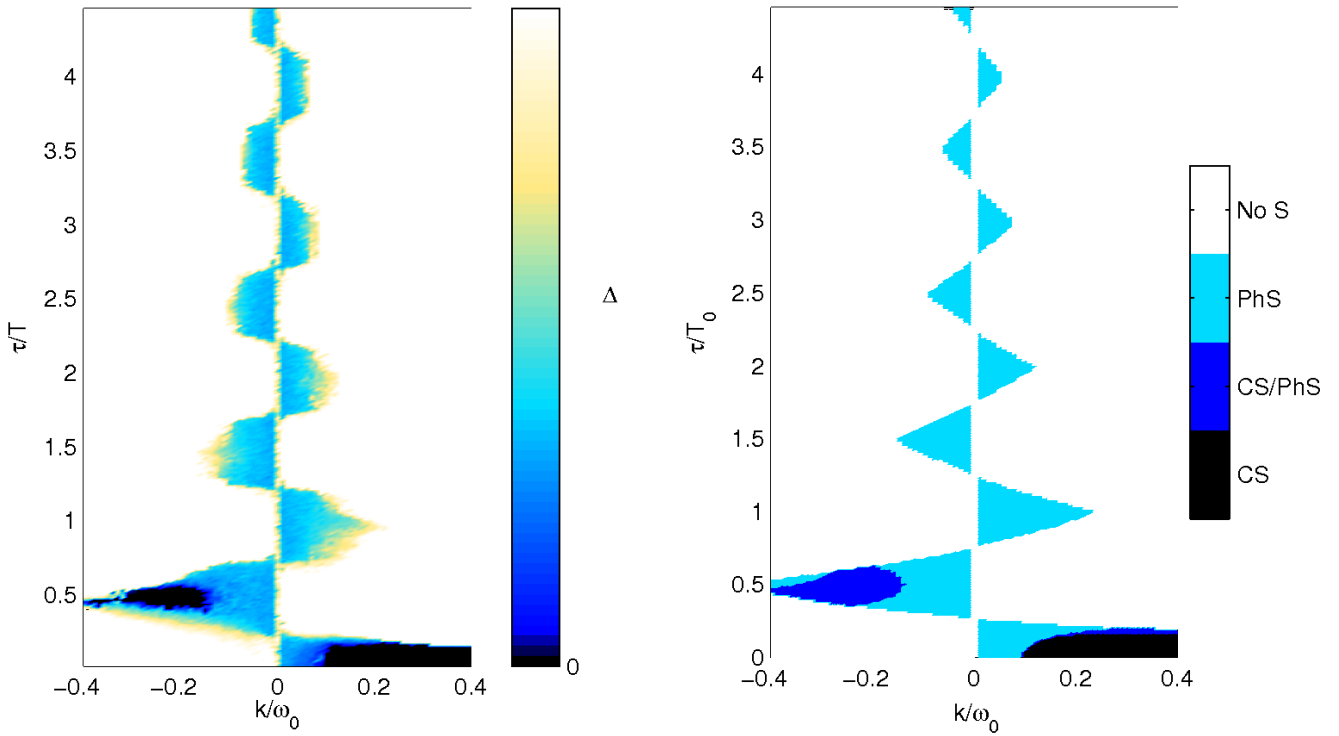


Abbildung 4.14: a) $\Delta(k, \tau)$ aus dem Experiment. b) Gebiete von Phasen- und vollständiger Synchronisation nach Abschätzung mithilfe der C-Matrix.

zweier nicht-invasiv gekoppelter Delaysysteme anwenden, um zu überprüfen, ob die vorausgesetzten Annahmen in dieser Situation ebenso gültig sind. Abb. 4.16 zeigt wie Abb. 4.14 den Vergleich zwischen dem experimentellen Befund und der Abschätzung mithilfe der C-Matrix des führenden Lyapunov-Vektors eines Delaysystems. Der generelle Trend, vollständige Synchronisation bei größeren Verzögerungszeiten zu finden, wird auch hiermit wiedergegeben. Die dominanten Strukturen sind diejenigen der Phasensynchronisation. Innerhalb dieser Strukturen stimmt das Ergebnis der Abschätzung qualitativ mit dem tatsächlichen Verhalten überein. Das Fehlen vollständiger Synchronisation bei $\tau = T_0$ und $\tau = 4T_0$ wird bestätigt. Die Ursache sieht man am Verlauf der Funktion $\chi(\tau)$ für die entsprechende Kopplung ($\mathbf{Q} = \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^T$) in Abb. 4.15. Wegen $\chi(T_0) < 0$ und $\chi(4T_0) < 0$ wird die instabilste Mode bei $k < 0$ stabilisiert, während die Nullmode für positive k stabil ist. Dadurch gibt es keinen Überlapp für vollständige Synchronisation. Insgesamt erinnert $\chi(\tau)$ an die Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen. Das ist nicht verwunderlich, da der seltsame Attraktor des Delaysystems einem quasiperiodischen Torus ähnelt (siehe Kap. 3). Eine deutliche Ausnahme vom vorhergesagten Synchronisationsverhalten findet sich bei $\tau = 2T_0$. Für kleine Kopplungsstärken deutet sich zwar die erwartete Synchronisation an, aber der größte Bereich bleibt nur phasensynchron. Man kann davon ausgehen, dass hierbei eine starke Wechselwirkung zwischen der intrinsischen Zeitverzögerung der Delaysysteme und der nicht-invasiven Kopplung eine Rolle spielt (siehe [59,60]). Ein weiteres auffälliges Phänomen ist die allgemeine Vergrößerung der Synchronisationsgebiete für große Verzögerungszeiten im Vergleich zur Prognose, was sehr wahrscheinlich auch mit der Wechselwirkung der beiden Zeitverzögerungen zu begründen ist.

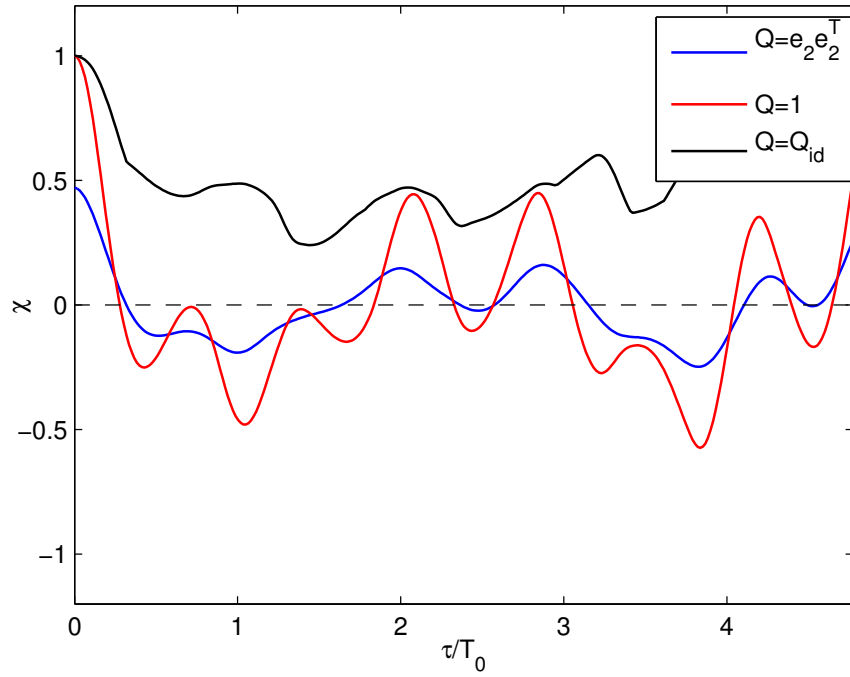


Abbildung 4.15: χ -Funktionen für eine Trajektorie des Delaysystems.

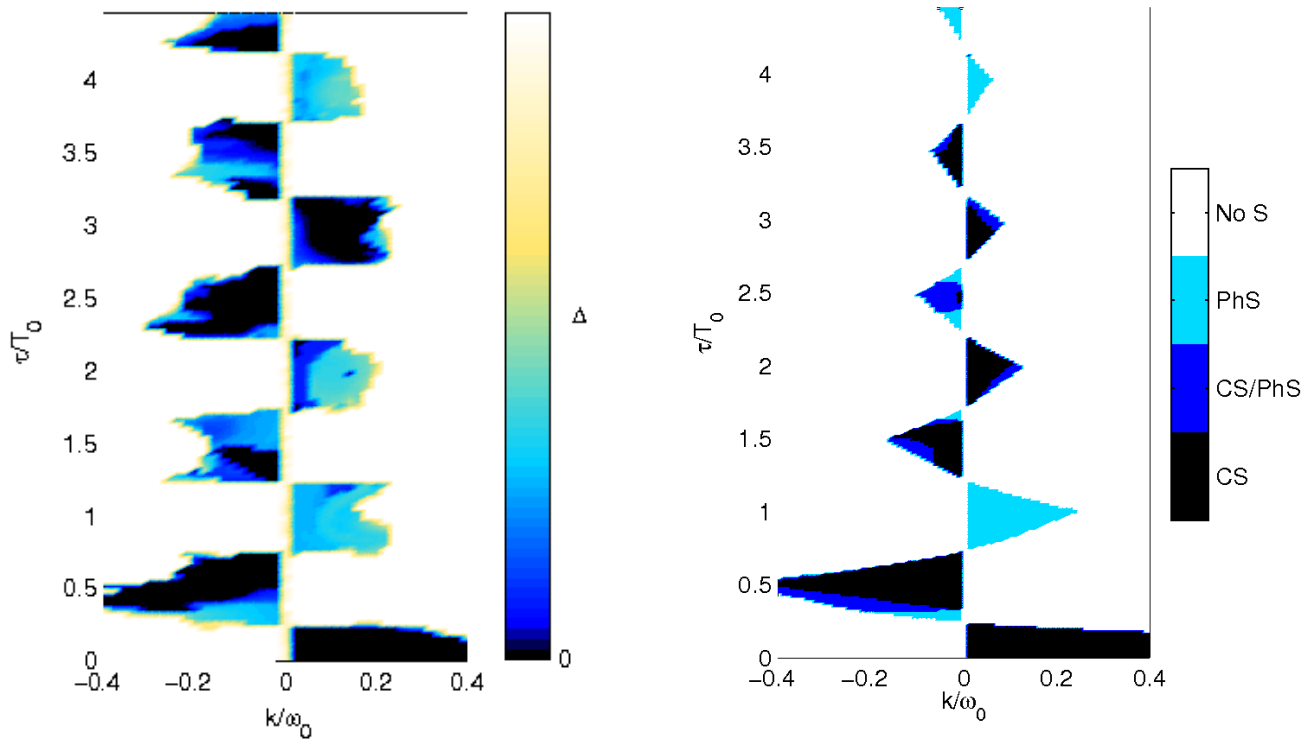


Abbildung 4.16: a) $\Delta(k, \tau)$ aus dem Experiment für nicht-invasiv gekoppelte Delaysysteme b) Gebiete von Phasen- und vollständiger Synchronisation nach Abschätzung mithilfe der C-Matrix eines einzelnen Delaysystems.

5 Erweiterte Kopplungstechniken

Die bisher verwendeten Kopplungsschemata haben alle gemeinsam, dass eine konstante Kopplung mit einer einzigen festen Verzögerungszeit für die Stabilisierung der Synchronisation sorgen soll. Die wesentlichen Konzepte darin sind häufig analog zu denen der Regeltechnik, die in den Ingenieurwissenschaften und der Kontrolltheorie schon seit langem studiert werden. Eine Zeitverzögerung tritt dabei im Wesentlichen als unerwünschter Nebeneffekt auf. Diese Eigenschaft wurde in meiner Arbeit mehrfach bestätigt. Die prinzipiellen Einschränkungen zeigen sich dabei immer derart wie in Gl. (3.13) oder Gl. (3.15), d.h., die für ein spezielles Rückkopplungsschema maximale Verzögerungszeit liegt immer in der Größenordnung der Lyapunovzeit $T_\lambda = \Lambda_0^{-1}$. Diese ist die charakteristische Zeit der zu kompensierenden Instabilität. Während für Fixpunkte und periodische Orbits die äußerste Verzögerungszeit grundsätzlich erreichbar ist, führt die Dekorrelation der Lyapunov-Vektoren in einem chaotischen Fluss zu einer zusätzlichen Einschränkung, so dass mit der herkömmlichen Methode nur bis zu einem kleinen Bruchteil der Lyapunovzeit eine Stabilisierung erreicht werden kann. Besteht dennoch eine Notwendigkeit, Stabilität auch für große Verzögerungszeiten zu erreichen, so kann man auf erweiterte Methoden wie die mehrfache zeitverzögerte Rückkopplung zurückgreifen. Pyragas hat für die antizipierende Synchronisation bereits demonstriert, dass das aus der zeitverzögerten Rückkopplungskontrolle bekannte Verfahren auch hierbei eine Vergrößerung der maximalen Verzögerungszeit ermöglicht [83]. Das Prinzip der Erweiterung liegt dabei in erster Linie nicht in der Aufhebung der komplexen Winkeldynamik im linearen Tangentialsystem. In der ‘Reinform’ des Stabilitätsproblems, wie man es für einen Fixpunkt erhält, wird bei mehrfacher Rückkopplung die Einschränkung (3.15) aufgehoben. Stabilität ist also einerseits für größere Verzögerungszeiten möglich und andererseits ist der minimale Wert des charakteristischen Exponenten für eine feste Verzögerungszeit sehr viel kleiner als es für einfache Rückkopplung der Fall wäre. Das bedeutet, dass auch für eine chaotische Trajektorie trotz des rapiden Korrelationszerfalls im linearen Tangentialsystem die verbesserten Stabilitätseigenschaften des erweiterten Schemas noch teilweise wirksam sind. Am eindrucksvollsten lässt sich das mit einer anderen Technik der erweiterten Kontrolle zeigen, die für das einfache Kontrollproblem am Fixpunkt eine drastische Verbesserung der Stabilität bewirkt.

5.1 Gepulste Kopplung

Stépán stellte 2006 das Konzept der *act-and-wait control* vor [84], die ich im Folgenden als *gepulste Kopplung* bezeichne. Das kontrollierte lineare System mit der Variablen $z \in \mathbb{R}$ sei

$$\dot{z} = \lambda_0 z - \kappa(t) z_\tau \quad (5.1)$$

mit einer periodisch modulierten Kopplungsstärke $\kappa(t) \in \{0, \kappa_p\}$, die für mindestens die Dauer einer Verzögerungszeit den Wert Null annimmt, so dass das System sich in dieser Zeit frei entwickelt nach $z \propto e^{\lambda_0 t}$. Stépán zeigt ferner, dass es bei diesem Verfahren eine Kombination aus Pulsdauer t_p und Kopplungsstärke κ_p gibt, so dass innerhalb eines Pulszyklus $z(t)$ exakt auf Null zurückgesetzt wird. Ein solcher Abklingvorgang entspricht effektiv einem Multiplikator von $\mu = 0$ oder einem Exponenten $\lambda = -\infty$ und wird in Stépáns Arbeit als *deadbeat control* bezeichnet. Ich verwende in Anlehnung an periodische Orbits der logistischen Abbildung mit $\mu = 0$ den Begriff *superstabile Kontrolle*. Die Zeitverzögerung ist bei der gepulsten Kontrolle ein Teil des Mechanismus und die superstabile Kontrolle ist in dem einfachen Modell für beliebig große Verzögerungszeiten zu erreichen. Im Folgenden wende ich diese Kontrollmethode auf das Problem der vollständigen Synchronisation an, indem ich in Schema (4.1) die Kopplungsstärke mit einer Pulssequenz modulierte.

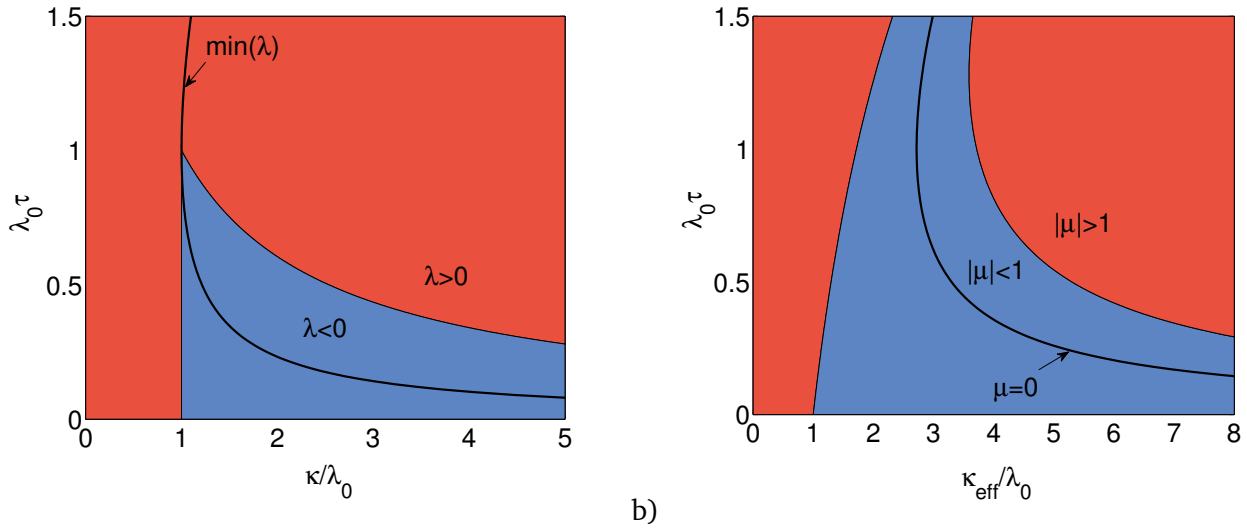


Abbildung 5.1: a) Stabilitätsgebiet bei konstanter Kopplung. b) Stabilitätsgebiet bei gepulster Kopplung.

5.1.1 Vergleich zu konstanter Kopplung

Das Stabilitätsgebiet der Gl. (5.1) für den Fall konstanter Kopplung ist in Abb. 5.1a gezeigt und die wesentlichen Eigenschaften dieses Gebietes lassen sich nach Anhang B.2 zusammenfassen zu

$$\min_{\kappa} (\Re(\lambda)) = \lambda_0 - \tau^{-1}$$

$$\tau_{\max} = \lambda_0^{-1},$$

Für eine periodische Modulation habe die Wartezeit mit $\kappa(t) = 0$ die Dauer t_w und die Pulsdauer sei t_p . Im Folgenden setze ich $t_w = \tau$ und $t_p < \tau$. Der zeitverzögerte Term greift in diesem Fall auf eine Zeit zurück, in der die Kopplung ausgeschaltet war. Das lässt sich auch als ein Kein-Überlapp-Kriterium formulieren durch $\kappa(t) \cdot \kappa(t + \tau) = 0$. Ist das erfüllt, so hat Gl. (5.1) genau eine Lösung. Mit $T = t_w + t_p = \tau + t_p$, $t_n = nT$, $n \in \mathbb{Z}$ und der Heaviside-Funktion $H(\cdot)$ kann man die Pulssequenz schreiben als

$$\kappa(t) = \kappa_p \sum_n \theta(t - t_n + \tau) \cdot \theta(t_{n+1} - t),$$

was anschaulich in Abb. 5.2 gezeigt ist. Die Lösung der Gl. (5.1) ist dann

$$z(t) \propto \begin{cases} e^{\lambda_0 t} & \Leftrightarrow \kappa(t) = 0 \\ (e^{\lambda_0 \tau} - \kappa_p(t - t_n)) e^{\lambda_0 t} & \Leftrightarrow \kappa(t) = \kappa_p. \end{cases}$$

Diesen Ausdruck kann man zusammen mit der Periodizität der Modulation benutzen, um die kontinuierliche Gl. (5.1) in eine diskrete Abbildung mit $z(t_n) = z_n$ umzuwandeln

$$z_{n+1} = \mu z_n.$$

Der Multiplikator ist

$$\mu = e^{\lambda_0(\tau+t_p)} - \kappa_{\text{eff}}(\tau + t_p) e^{\lambda_0 t_p}$$

mit $\kappa_{\text{eff}} = \frac{t_p}{\tau+t_p} \kappa_p.$

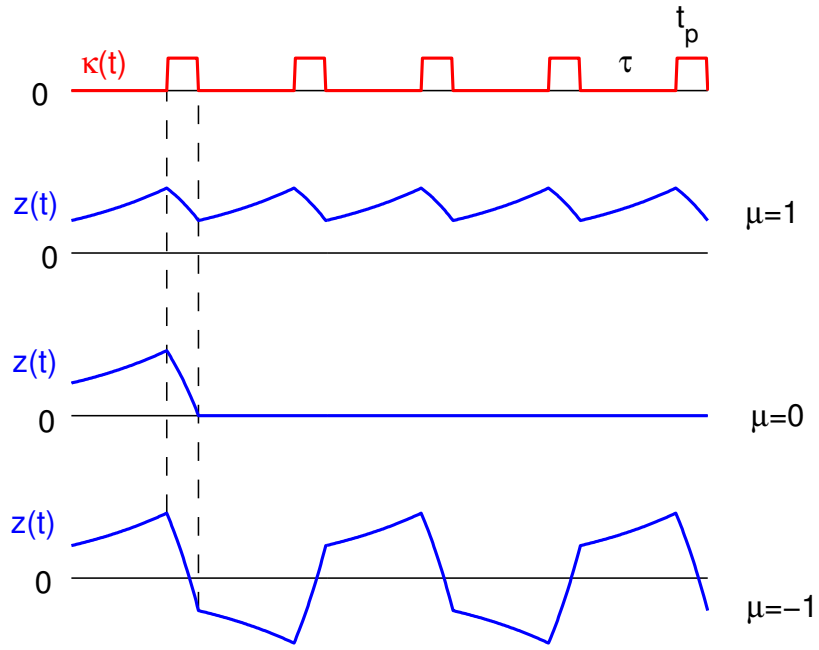


Abbildung 5.2: Pulssequenz der Kopplung und typische Zeitreihen $z(t)$ für die Ränder und das Zentrum des Stabilitätsgebietes.

Für den Grenzfall kurzer und starker Kontrollpulse, d.h., $t_p \rightarrow 0$ und $\kappa_p \rightarrow \infty$ während $\kappa_{\text{eff}} = \text{const}$, vereinfacht sich dies zu

$$\mu = e^{\lambda_0 \tau} - \kappa_{\text{eff}} \tau. \quad (5.2)$$

Hiermit wird ersichtlich, dass superstabile Kontrolle für

$$\kappa_{\text{eff}} = \tau^{-1} e^{\lambda_0 \tau}$$

erreicht wird. Das Stabilitätsgebiet ist in Abb. 5.1b aufgetragen. Für kleine Verzögerungszeiten führt die Modulation effektiv nur zu einer Reskalierung der Kopplungsstärke. Als Funktion der mittleren Kopplungsstärke κ_{eff} stimmt das Ergebnis für $\tau = 0$ mit dem der konstanten Kopplung überein. Der wesentliche Unterschied wird für große Verzögerungszeiten sichtbar. Allerdings schnürt sich das Stabilitätsintervall in κ_{eff} mit zunehmendem τ eng ein. Die Stabilisierung für sehr große Verzögerungszeiten ist also nur mit einer sehr präzise eingestellten Kopplungsstärke möglich. Abb. 5.2 verdeutlicht den Mechanismus der Stabilisierung mit gepulster Kontrolle.

Es bleibt die Frage, inwieweit sich diese Eigenschaften auf den Abstandsvektor bei gekoppelten chaotischen Systemen übertragen lassen. Experimentell lässt sich die gepulste Kopplung sehr einfach implementieren, indem man das Differenzsignal mit einem Multiplizierer überträgt, dem eine Pulssequenz aus einem Funktionsgenerator als Verstärkungsfaktor eingespeist wird. Um die erreichbare Qualität der Synchronisation zu quantifizieren, verwende ich eine Ähnlichkeitsfunktion aus der Differenz $d_{k,\tau}(t) = |y_2(t) - x_2(t)|$ der Signale

$$\begin{aligned} \Delta(k, \tau) &:= \langle d_{k,\tau}(t) \rangle_t \\ S(\tau) &:= \max_k \left(\log \left(\frac{\Delta_0}{\Delta(k, \tau)} \right) \right). \end{aligned} \quad (5.3)$$

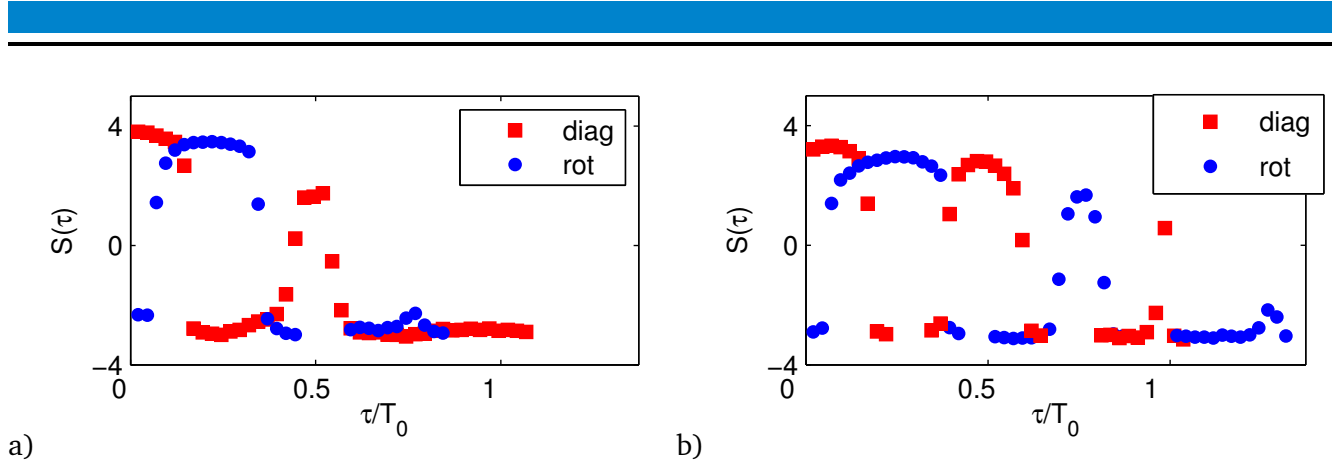


Abbildung 5.3: Der Grad der Synchronisation $S(\tau)$ für a) konstante und b) gepulste Kopplung.

Die Konstante Δ_0 ist dabei beliebig wählbar und die Funktion $S(\tau)$ nimmt umso größere Werte an je näher sich die Trajektorien sind. Als Kopplungsmatrix wähle ich in dem Versuch zwei ausgewählte Typen, nämlich partielle diagonale Kopplung ('diag')

$$\mathbf{K} = \frac{k}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

und rotierende Kopplung ('rot')

$$\mathbf{K} = \frac{k}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Diese sind Spezialfälle der PDK-Kopplung nach Pyragas. Ich verwende nur diese beiden Fälle, da sich die kontinuierliche Rotation $\mathbf{Q}(\tau)$ experimentell nur unter erheblichem Aufwand umsetzen lässt. Die Folge von Extrema der Funktion $S(\tau)$ in Abb. 5.3 entspricht den alternierenden Strukturen in Abb. 4.14. Es ist deutlich zu erkennen, dass mit gepulster Kopplung noch bei größeren Verzögerungszeiten vollständige Synchronisation möglich ist als es für konstante Kopplung der Fall ist. Aber auch hier äußert sich die turbulente Dynamik der Lyapunov-Vektoren in einem vergleichsweise schnellen Abfall der Einhüllenden. Deutlicher wird das Phänomen anhand einer numerischen Simulation des Grenzfalles $t_p \rightarrow 0$, für die die kontinuierliche Phasendrehung verwendet wurde

$$\mathbf{Q}_\tau = \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 \tau) & -\sin(\omega_0 \tau) & 0 \\ \sin(\omega_0 \tau) & \cos(\omega_0 \tau) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

so dass sich die beiden experimentellen Matrizen als Spezialfälle für $\tau = nT_0/4$ ergeben. Das Ergebnis ist in Abb. 5.4 dargestellt. Die Ähnlichkeitsfunktion fällt wie erwartet beim Vorzeichenwechsel des Lyapunovexponenten rapide ab. Die gepulste Kopplung erweitert zwar die maximale Verzögerungszeit und hat eine deutlich verbesserte Stabilität. Die Superstabilität wird jedoch bei keiner Verzögerungszeit beobachtet. Für kleine τ liegt dies am 'Ausweichen' der Lyapunov-Vektoren auf die verbleibende, nicht kontrollierte dritte Komponente. Für große τ begrenzt die Dekorrelation jegliche Stabilisierung. Der Abstandsvektor kann nicht durch einen Puls auf Null zurückgesetzt werden, weil das verzögerte Signal den Bezug zur Richtung verloren hat, in die korrigiert werden müsste. Bei der konstanten Kopplung zeigt sich diese Eigenschaft dadurch, dass der Exponent im Vergleich zum idealen Kontrollproblem stets größer ist und deshalb schon bei einer kleineren Verzögerungszeit ins Positive übergeht.

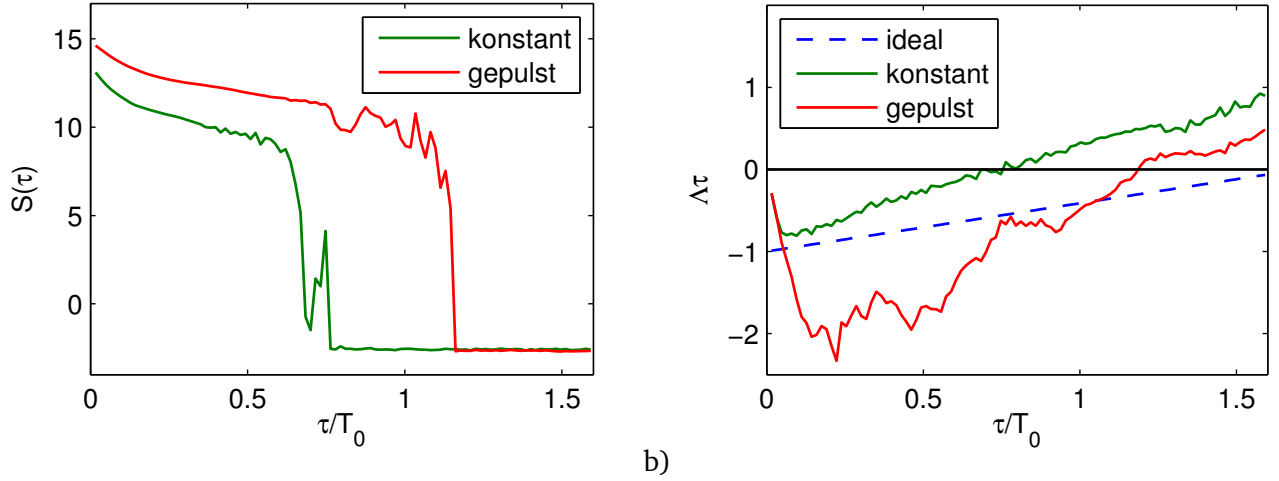


Abbildung 5.4: a) $S(\tau)$ für das gepulste numerische System. b) Kleinster Wert des maximalen transversalen Lyapunovexponenten. Die gestrichelte Kurve zeigt das Ergebnis für konstante Kopplung im idealen System (5.1).

5.2 Verzögerungskompensation

In Kapitel 4 habe ich die Dynamik der Lyapunov-Vektoren eines frei laufenden Diodenoszillators untersucht und daraus mit teils sehr allgemeinen Konzepten Vorhersagen über das Synchronisationsverhalten abgeleitet. Für jede der drei Dimensionen des Systems existiert dabei ein Lyapunov-Vektor $\mathbf{a}(t)$ in Form eines Funktionals der Trajektorie $\zeta(t)$. Betrachtet man die Gesamtheit aller Lyapunov-Vektoren, so kommt man zum Konzept der Evolutionsmatrix \mathbf{L}_t , die in Kapitel 1 eingeführt wurde. In diesem Sinne sind sämtliche Aussagen über Lyapunov-Vektoren im Grunde Eigenschaften dieser Matrix. Sie beinhaltet die Zeitentwicklung des linearen Tangentialsystems und ist definiert durch

$$\dot{\mathbf{L}}_t(\zeta(t_0)) = \mathbf{Df}(\zeta(t)) \cdot \mathbf{L}_t(\zeta(t_0)) \quad (5.7)$$

mit $\mathbf{L}_0(\zeta(t_0)) = \mathbf{1}$. Der wesentliche Nutzen dieser Matrix liegt in der Darstellung

$$\mathbf{L}_\tau(\zeta(t - \tau)) \cdot \mathbf{v}_\tau = \mathbf{v}.$$

Eine solche Abbildung ist nur für das frei laufende System möglich. Bei gepulster Kopplung ist diese Situation gegeben, weil die zeitverzögerte Rückkopplung jeweils für mindestens die Zeit τ ausgeschaltet bleibt. Wirkt ausgehend von Schema (4.1) eine gepulste Kopplung mit einer dimensionslosen Pulsstärke $b \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{f}(\mathbf{y}) + b\delta(t - t_n)\mathbf{Q}_n(\mathbf{x}_\tau - \mathbf{y}_\tau), \end{aligned}$$

dann wird mit $t_{n+1} - t_n = \Delta t > \tau$ durch die zeitabhängige Kopplung

$$\mathbf{Q}_n = \mathbf{L}_\tau(\mathbf{x}(t_n - \tau))$$

die Zeitverzögerung kompensiert, so dass das lineare Tangentialsystem auf ein skalares Problem reduziert wird. Das ist damit zu begründen, dass durch die Evolutionsmatrix die Kopplungskraft exakt in die Richtung des instantanen Vektors \mathbf{v} ausgerichtet wird, so dass wie bei der diagonalen instantanen Kopplung die maximale Wirkung erreicht wird und die Winkeldynamik der Lyapunov-Vektoren unangetastet

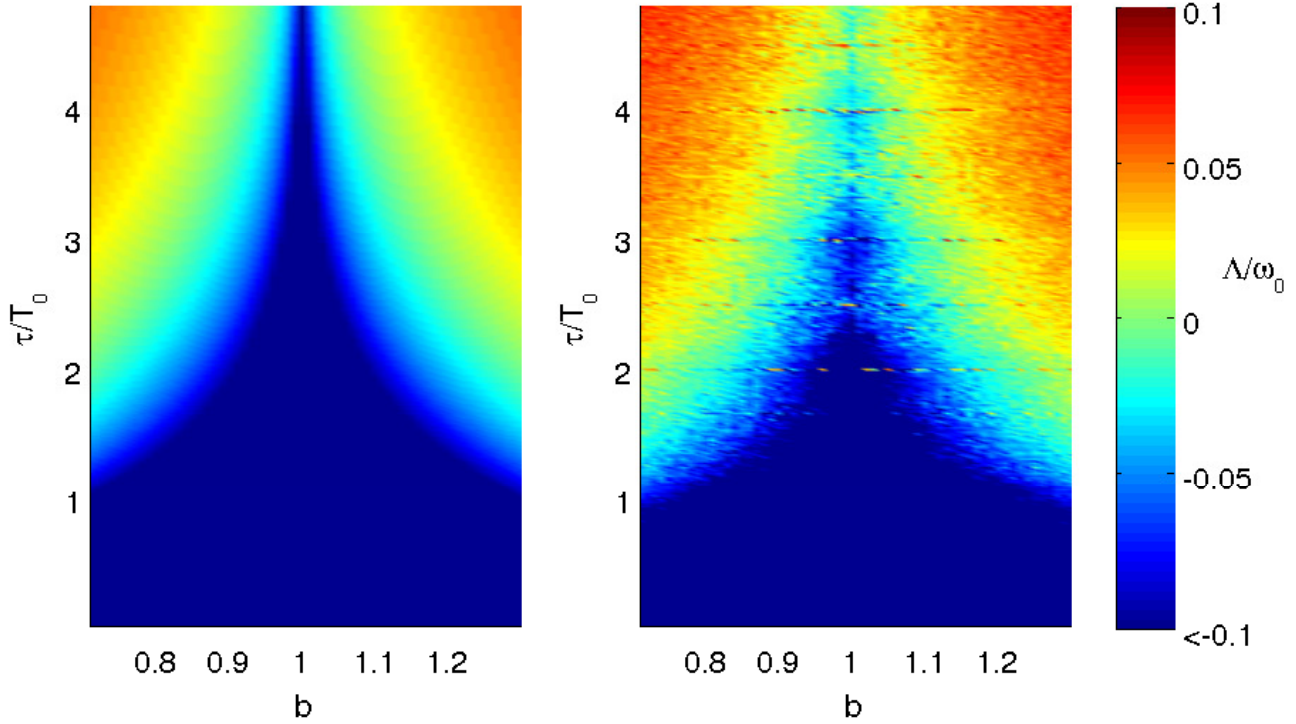


Abbildung 5.5: Gepulste Kopplung mit Verzögerungskompensation. a) Volle Kompensation durch die Evolutionsmatrix (analytisch). b) Partielle Evolutionsmatrix für Kopplung nur im Unterraum der ersten und zweiten Komponente (numerisch).

bleibt. Für $\Delta t \rightarrow \tau$ erhält man dieselben Stabilitätseigenschaften wie in Gl. (5.2) mit $b e^{\Lambda_0 \tau} = \kappa_{\text{eff}} \tau$, und superstabile Synchronisation ist somit für alle Verzögerungszeiten möglich. Abb. 5.5a zeigt das analytische Ergebnis für $\Lambda(b, \tau)$ bei voller Verzögerungskompensation. Für Abb. 5.5b wurde in einer numerischen Simulation dasselbe Prinzip angewandt und nur die beiden ersten Komponenten zur Kopplung benutzt. Eine Stabilisierung erfolgt dennoch bis zu extrem großen Verzögerungszeiten. In dem Zusammenhang ist es erwähnenswert, dass die PDK-Kopplung nach Pyragas und die von mir vorgeschlagene Idealkopplung (siehe Anhang B.3.2) Näherungen durch eine konstante Kopplungsmatrix sind, die genau den Zweck erfüllen sollen, den man im Idealfall mithilfe der Evolutionsmatrix erreicht.

5.3 Verzögerte und antizipierende Synchronisation

Die Umkehrung antizipierender Synchronisation ist die verzögerte Synchronisation, die bereits in Kapitel 1 genannt wurde. Im Kopplungsschema

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{K}_x(\mathbf{y}_\tau - \mathbf{x}) \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{f}(\mathbf{y}) + \mathbf{K}_y(\mathbf{x} - \mathbf{y}_\tau)\end{aligned}\tag{5.8}$$

werden beide Effekte vereint. System Y eilt dabei System X voraus, wie bei der bekannten antizipierenden Synchronisation. Der wesentliche Unterschied zu Schema (4.3) besteht darin, dass ein Eingriff in das Mastersystem erlaubt wird. Die LT-Transformation mit $\mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{y}_\tau - \mathbf{x})$ liefert dann

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{f}(\mathbf{u}) \\ \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{Df}(\mathbf{u})\mathbf{v} - \mathbf{K}_y\mathbf{v}_\tau - \mathbf{K}_x\mathbf{v}.\end{aligned}$$

Die Struktur der transversalen Gleichung erinnert an die der invasiven Schemata wie z.B. Gl. (1.25). Wird der verzögerte Term infolge der Dekorrelation der Lyapunov-Vektoren wirkungslos, kann dennoch für alle Verzögerungszeiten eine Stabilisierung mithilfe des instantanen Terms erreicht werden. Eine andere Möglichkeit, die für die Untersuchung zeitverzögerter Kopplung interessanter ist, liegt in der gezielten Veränderung der Eigenschaften von Lyapunov-Vektoren wie in Kap. 4.2.3. An einem Beispiel zeige ich, dass durch Blockieren des Mechanismus der Dekorrelation die Wirksamkeit der zeitverzögerten Kopplung maximiert werden kann. Sei für die Diodenoszillatoren die Kopplung $\mathbf{K}_x = k\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3^\top$ ein Projektor auf die dritte Komponente und $k \gg \|\mathbf{Df}(\mathbf{u})\|$ für alle typischen Werte der Linearisierung, so dass $\dot{\nu}_3 < 0$ ist und damit die dritte Komponente fixiert wird. Das verbleibende lineare Tangentialsystem ist dann zeitunabhängig wie für den trivialen Fixpunkt und der führende Lyapunov-Vektor führt eine einfache Spiralbewegung in den ersten beiden Komponenten aus. Damit können sämtliche Methoden der Stabilisierung durch \mathbf{K}_y die maximale Wirkung erreichen. Mit gepulster Kopplung $\mathbf{K}_y \rightarrow \mathbf{K}_y(t)$ oder der erweiterten PDK-Kopplung nach Pyragas [83] ist so auch eine stabile Lösung mithilfe des verzögerten Terms für beliebig große Verzögerungszeiten zu erreichen. Die komplizierte Implementierung der Evolutionsmatrix, die stark an die OGY-Kontrolle erinnert [27], wird dadurch redundant.



Zusammenfassung

In dieser Arbeit habe ich die vollständige chaotische Synchronisation zweier identischer Schwingkreise untersucht, die über Verzögerungsleitungen gekoppelt sind. Numerische Simulationen dieser Systeme stimmen dabei hervorragend mit den experimentellen Beobachtungen überein. Ich konnte prinzipielle Eigenschaften unterschiedlicher Formen der Kopplung auf einer allgemeinen formalen Ebene diskutieren. Die verschiedenen Kopplungstypen ergeben sich kombinatorisch aus bidirektionaler und unidirektionaler Kopplung sowie instantaner und zeitverzögerter Kopplung. Jede Kopplung lässt sich verstehen als eine Superposition einer invasiven und einer nicht-invasiven Komponente. Der invasive Anteil wirkt wie eine Selbstrückkopplung und beeinflusst die dynamischen Zustände im Fall vollständiger Synchronisation, so dass diese sich von denen eines einzelnen frei laufenden Systems unterscheiden. Nach der Transformation in longitudinale und transversale Koordinaten ist der invasive Teil der Kopplung in der longitudinalen Richtung zu erkennen. Der nicht-invasive Anteil ist maßgebend für die Stabilität jedes synchronen Zustandes und betrifft die transversale Komponente in der Nähe der Synchronisationshyperebene. Variationen der Kopplung, die symmetrisch unter Vertauschung der Systeme sind, betreffen nur den nicht-invasiven Anteil. Damit kann man gezielt die Stabilitätseigenschaften spezieller synchroner Zustände untersuchen und Auskunft über den Mechanismus der Stabilisierung bekommen.

Für die allgemeine Stabilitätsanalyse betrachte ich lineare Tangentialsysteme, die die Entwicklung einer Störung der vollständigen Synchronisation beschreiben. Die gemeinsame Trajektorie innerhalb der Synchronisationshyperebene liefert dabei den Antrieb des linearen Systems. Ich habe eine Fallunterscheidung zwischen Fixpunkten, periodischen Orbits und aperiodischen Trajektorien gemacht. Für Fixpunkte ist das lineare System zeitunabhängig und die lokalen Eigenwerte geben direkt die Stabilität an. Für periodische Orbits lassen sich zeitverzögerte Terme auf instantane Terme abbilden und damit ist das zeitabhängige Problem bis auf Skalierungsfaktoren äquivalent zum zeitunabhängigen Problem. So konnte ich in einem speziellen Kopplungsschema eine grundlegende Einschränkung für das Auftreten eines Fixpunktes und synchroner periodischer Orbits herleiten. Die besondere Schwierigkeit bestand in der Analyse der aperiodisch getriebenen Systeme, für die die Abbildung auf instantane Größen nicht ohne Weiteres möglich ist.

Ich habe gezeigt, dass der analytische Ansatz aus der zeitverzögerten Rückkopplungskontrolle in ähnlicher Form auf den Fall chaotischer Synchronisation anwendbar ist. Die Lyapunovexponenten hängen aufgrund zeitverzögerter Terme implizit von sich selbst ab, wie es auch bei dem verwandten Floquet-Problem der Fall ist. Linearisierungen der unbekannten Funktionen für die Exponenten liefern dabei gute Ergebnisse. Der Einfluss eines verzögerten Terms auf die Stabilität der chaotischen Synchronisation ist deutlich kleiner als der eines instantanen Terms. Damit bestätige ich einerseits die bekannte Tatsache, dass stabile vollständige Synchronisation am besten durch Beimischen einer geeigneten Selbstrückkopplung erreichbar ist. Dadurch wird der verzögerte Term in transversaler Richtung eliminiert und die Stabilisierung vollständiger Synchronisation reduziert sich auf den Mechanismus einer einfachen Dämpfung. Andererseits konnte ich aber zeigen, dass der Punkt größter transversaler Stabilität im Allgemeinen nicht bei dem üblicherweise verwendeten Mischungsverhältnis liegt.

Die Eliminierung zeitverzögerter Terme im transversalen System ist nicht für jede Anwendung möglich, wie das Beispiel der antizipierenden Synchronisation zeigt. Für eine detaillierte Stabilitätsanalyse solcher Fälle habe ich ein nicht-invasives Kopplungsschema betrachtet, das prinzipiell mit dem für antizipierende Synchronisation übereinstimmt. Der Verlauf der Stabilitätsexponenten für kleine Kopplungsstärken konnte dabei aus den Eigenschaften der Lyapunov-Vektoren vorhergesagt werden. Entscheidend ist die Kohärenz des führenden Lyapunov-Vektors eines ungekoppelten Systems. Diese wird mithilfe der von mir eingeführten C-Matrix gemessen, die einer mehrkomponentigen Autokorrelationsfunktion ähnelt. Die

Entwicklungskoeffizienten für den transversalen Exponenten lassen sich dann mithilfe einer Spurformel aus dieser Matrix gewinnen. Dabei zeigt sich, dass die Dekorrelation zwischen einem Lyapunov-Vektor und dem entsprechenden zeitverzögerten Vektor für große Verzögerungszeiten zu einer wirkungslosen Kopplung führt.

Für größere Kopplungsstärken habe ich ein stochastisches Modell entwickelt, das die Wechselwirkung zwischen chaotischem Antrieb und zeitverzögerter Rückkopplung in den linearen Begleitsystemen beschreiben soll. Das wesentliche Merkmal des Modells ist ein multiplikatives Rauschen im zeitverzögerten Term, das die wechselnde Orientierung zwischen instantanem und zeitverzögertem Abstandsvektor während der Zeitentwicklung der chaotischen Trajektorie beschreibt. Für zwei Grenzfälle konnte ich die zeitabhängige charakteristische Gleichung dieses Modells analytisch lösen. Für andere Situationen konnte ich heuristische Ansätze aufstellen. Die resultierenden Eigenwertgleichungen geben das Synchronisationsverhalten der verwendeten Oszillatoren zuverlässig wieder und bieten einen geeigneten Ansatz für die Untersuchung anderer Systeme.

Darüber hinaus konnte ich mithilfe gepulster Kopplung eine Verbesserung der antizipierenden Synchronisation nachweisen. Es hat sich herausgestellt, dass diejenigen Methoden, die eine Verbesserung bei einem zeitunabhängigen Stabilitätsproblem liefern, auch bei komplizierten zeitabhängigen Tangentialsystemen eine verbesserte stabilisierende Wirkung zeigen. Die Grenzen der Stabilität werden dennoch durch den zuvor gefundenen Mechanismus der Dekorrelation in den Lyapunov-Vektoren bestimmt. Leistungsfähige erweiterte Methoden für zukünftige Anwendungen müssen diese Eigenschaft berücksichtigen und die zeitverzögerte Kopplung mit einem geeigneten Kompensationsverfahren kombinieren. Die Ergebnisse des letzten Kapitels belegen, dass ein komplizierter dynamischer Vorgang mit endlicher Reaktionszeit nur auf die Weise stabilisiert werden kann.

A Experiment und Numerik

A.1 Nichtlinearität des Schwingkreises

Die Nichtlinearität der Bauteilgruppe B in Abb. 2.1 kann durch eine Rampenfunktion approximiert werden. Entscheidend dafür sind die charakteristischen Eigenschaften der Diode. Deren statisches und dynamisches Verhalten im Netzwerk soll hier genauer untersucht werden.

In meinem Aufbau benutze ich eine Diode vom Typ 1N4007 des Herstellers DC Components. Die vollständige Modellierung einer solchen Diode umfasst die Größen Diffusionsstrom, Rekombinationsstrom, Durchbruchstrom, Bahnwiderstand, Sperrschichtkapazität und Diffusionskapazität, siehe [85]. Zunächst betrachte ich die statischen Eigenschaften der Diode in der gegebenen Operationsverstärkerschaltung. Der Operationsverstärker ist als invertierender Verstärker geschaltet und gibt im Idealfall zu jedem Zeitpunkt eine Spannung aus, die proportional zum Diodenstrom ist:

$$U_B = -R_B I_D . \quad (\text{A.1})$$

Im statischen Fall verschwinden die kapazitiven Eigenschaften der Diode und der Diodenstrom ist nur eine Funktion der Diodenspannung, $I_D = I_D(U_D)$. Diese ergibt sich nach den Kirchhoff'schen Regeln unter der Nebenbedingung, dass am invertierenden Eingang des Verstärkers ein Punkt virtueller Masse (Potenzial Null) erzeugt wird:

$$\frac{U_1 - U_D}{R_1} + \frac{U_3 - U_D}{R_3} + \frac{U_- - U_D}{R_-} = I_D(U_D) . \quad (\text{A.2})$$

Ohne Einschränkung kann der Knoten mit drei Widerständen durch einen einzelnen Messwiderstand R_M ersetzt werden. Mit einer Messspannung

$$U_M = R_M \left(\frac{U_1}{R_1} + \frac{U_3}{R_3} + \frac{U_-}{R_-} \right) \quad (\text{A.3})$$

reduziert sich das Problem der Gl. (A.2) auf

$$\frac{U_M}{R_M} - \frac{U_D}{R_g} = I_D(U_D) , \quad (\text{A.2}')$$

wobei $R_g^{-1} = R_1^{-1} + R_3^{-1} + R_-^{-1}$. In Abbildung A.1a ist die Schaltung zur Messung des Diodenstroms mit einem Widerstand von $R_M = 10k\Omega$ dargestellt. Die Spannung $U_M(t)$ ist ein langsames Dreieckssignal mit einer Steigung von $\pm 320mV/s$. Der Diodenstrom ist als Funktion dieser Spannung in Abbildung A.1b aufgetragen. Wie erwartet ist keine Hysterese zu erkennen. Den wesentlichen Beitrag zum Verlauf der Kurve leistet der Diffusionsstrom, der sich vereinfacht schreiben lässt als Arrheniusgesetz

$$I_D(U_D) = I_S \exp \left(\frac{eU_D}{f_e k_B T} \right) . \quad (\text{A.4})$$

Dabei ist I_S der Sättigungssperrstrom und f_e der Emissionskoeffizient. Beide Größen sind charakteristisch für die verwendete Diode. Setzt man diesen Ausdruck in Gl. (A.2) ein, so erhält man eine transzendente Gleichung vom Typ

$$I_M - I = I_D = I_S \exp(bI) \quad (\text{A.5})$$

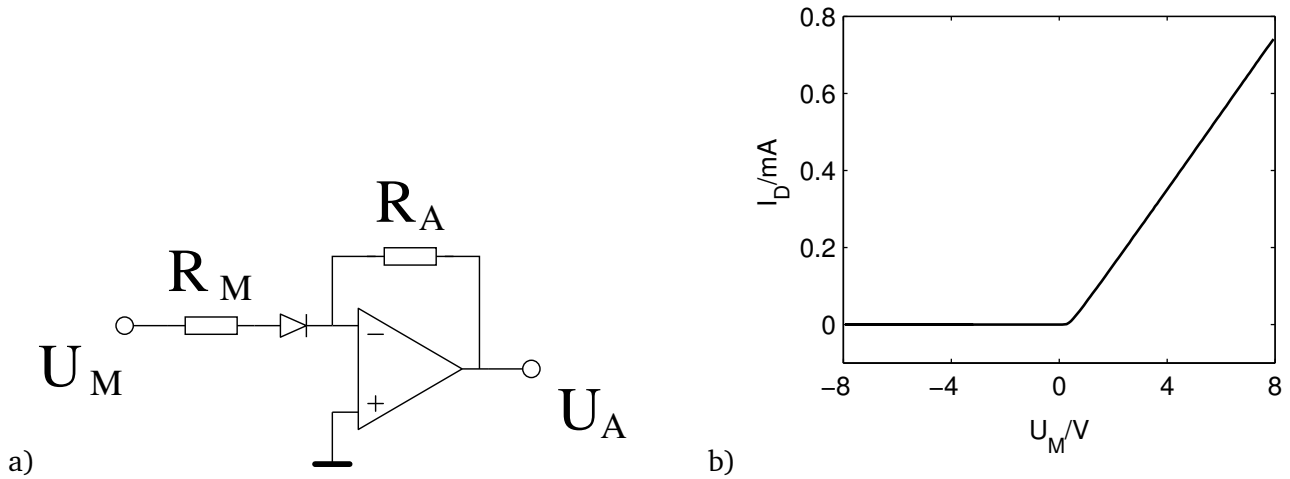


Abbildung A.1: a) Ersatzschaltung zur Bestimmung der Diodencharakteristik. $R_M = 10k\Omega$, $R_A = 13k\Omega$, Diode DC1N4007. b) Der Diodenstrom als Funktion der Eingangsspannung U_M .

mit $I_M = \frac{U_M}{R_M}$, $I = \frac{U_D}{R_g}$ und $b = \frac{eR_g}{f_e k_B T}$. Um die explizite Abhängigkeit des Diodenstroms von den Eingangsgrößen darzustellen, formt man Gl. (A.5) zunächst wie folgt um:

$$bI_D \exp(bI_D) = bI_S \exp(bI_M). \quad (\text{A.5}')$$

Mit der Lambert-W-Funktion $W(z)$, die durch $W(z) \exp(W(z)) = z$ für $z \in \mathbb{C}$ definiert ist, erhält man

$$I_D = b^{-1} W(bI_S \exp(bI_M)). \quad (\text{A.6})$$

Passt man die Parameter den experimentellen Daten an, so ergibt sich $b = 210k\Omega/V$ und $I_S = 7.7nA$. Die Übereinstimmung der Funktion Gl. (A.6) mit den Messdaten ist hierbei zwar hervorragend. Die numerische Auswertung der Lambertfunktion ist aber gegenüber der Rampenfunktion sehr zeitaufwändig, weshalb ich für numerische Simulationen die Rampenfunktion vorziehe.

Für den Einsatz der Diode im Schwingkreis bleibt die entscheidende Frage, inwieweit deren kapazitive Eigenschaften eine Rolle spielen. Dazu wird die Testschaltung aus Abb. A.1a so erweitert, dass bis auf den Widerstand R_3 der Teil B des vollen Diodenoszillators nachgebildet wird. Die U_1 - und U_3 -Komponente werden in der Messspannung $U_M(t)$ zusammengefasst, welche in diesem Versuch eine sinusförmige Spannung mit einer Frequenz von $1.6kHz$ und $5V$ Amplitude ist. Diese Spannung soll näherungsweise die Bedingungen im laufenden Schwingkreis vortäuschen. Abb. A.2 zeigt den Verlauf des Diodenstroms als Funktion von U_M . Als erstes fällt gegenüber Abb. A.1b eine Verschiebung der Kurve zu größeren Spannungswerten hin auf. Das ist erwünscht und liegt an der Einkopplung der negativen Versorgungsspannung in den Knotenpunkt mit der Diode. Diese Eigenschaft ist vollkommen analog zu der Verschiebung im Term $(x - c)$ des Rösslersystems. Solange die U_1 -Komponente den Schwellenwert c nicht überschreitet, bleibt die U_3 -Komponente inaktiv. Wächst U_1 über diesen Wert an, entsteht ein kurzer Puls in der U_3 -Komponente, der den Rückfaltungprozess bewirkt. Der Unterschied zum Diodenschwingkreis besteht darin, dass U_3 im Schwingkreis direkt von U_1 angetrieben wird und im Rösslersystem indirekt dadurch, dass die stabilisierende Dämpfung in eine Instabilität umgewandelt wird, wenn $(x - c) > 0$. Andere Eigenschaften der Diode sind für den Schwingkreis nicht entscheidend. Durch die zügige zeitliche Änderung der Diodenspannung äußert sich die Sperrschichtkapazität in einem kleinen Unterschwinger, wenn die Spannung aus dem Durchlass- in den Sperrbereich abgesenkt wird. Zwar erwartet man, dass die typischen Sperrschichtkapazitäten im Bereich weniger pF zusammen mit den verwendeten Wider-

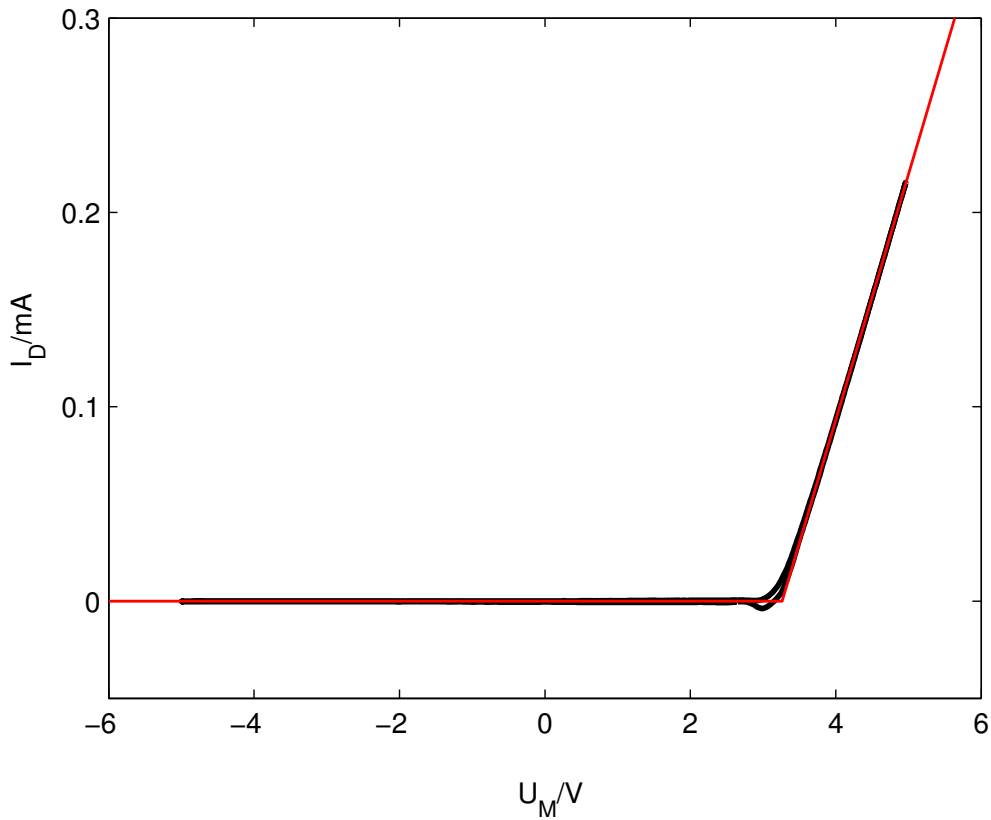


Abbildung A.2: Schwarz: Diodenstrom $I_D(t)$ aufgetragen gegen die Messspannung $U_M(t)$. Rot: Rampenfunktion nach Gl. (A.8).

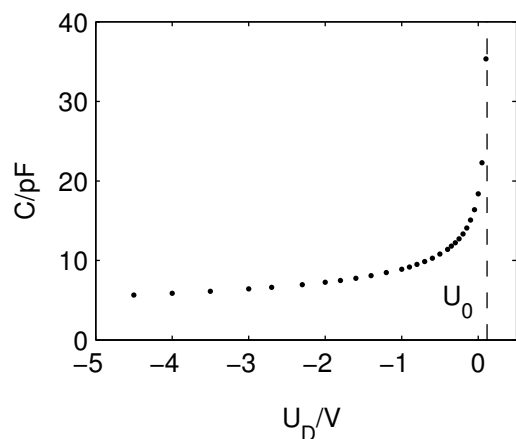
ständen im kHz -Bereich völlig unauffällig sind. Wenn man aber berücksichtigt, dass die Kapazität sich als Funktion der Diodenspannung verhält wie

$$C(U_D) = \frac{dQ}{dU_D} = C_0 \left(1 - \frac{U_D}{U_0}\right)^{-m_s}, \quad (\text{A.7})$$

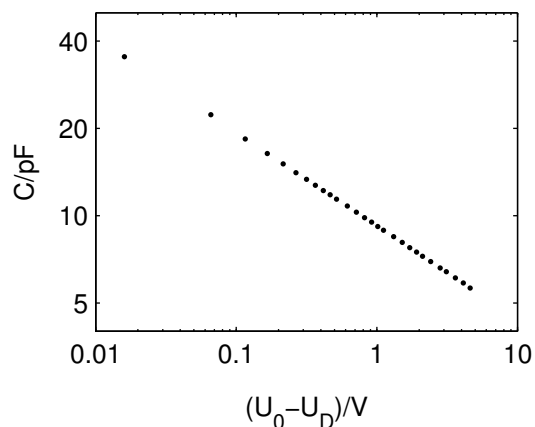
dann wird klar, dass beim Durchqueren der Spannung U_0 das kapazitive Verhalten kurzfristig eine Rolle spielen kann. Die Diffusionsspannung U_0 und der Kapazitätskoeffizient m_s lassen sich aus Abb. A.3 ablesen. Dafür habe ich den Verlauf der Sperrschichtkapazität experimentell ermittelt. Für jeden Messpunkt wird die konstante Diodenspannung mit einer hochfrequenten Schwingung kleiner Amplitude überlagert. Mit einem Auswertungsverfahren, das der Technik eines Lock-In Verstärkers ähnlich ist, habe ich so aus Amplitude und Phase des hochfrequenten Signals im Diodenstrom die differenzielle Kapazität wie in Gl. (A.7) rekonstruiert. Für den im MHz -Bereich getriebenen Diodenresonator ist sie zwar die entscheidende Eigenschaft. Für den langsamen autonomen Diodenoszillator wird sie aber im Folgenden wegen ihres unwesentlichen Beitrags zum Diodenstrom vernachlässigt. Stattdessen verwende ich die Rampenfunktion zur Modellierung von Teil B des Schwingkreises

$$I_D(U_1) = L_D \Upsilon(U_1 - U_{th}) \quad (\text{A.8})$$

mit der Steigung $L_D = 126.4 \mu\text{A/V}$ und dem Schwellenwert $U_{th} = 3.261 \text{V}$.



a)



b)

Abbildung A.3: Die Diodenkapazität der Diode DC1N4007 als Funktion der Diodenspannung im Sperrbereich. a) Lineare Auftragung, Diffusionsspannung $U_0 = 116\text{mV}$. b) Doppelt-logarithmische Auftragung, Kapazitätskoeffizient $m_s = 0.32$.

A.1.1 Nichtlinearität und Dissipation

Der Diodenstrom als Funktion der Spannungen U_1 und U_3 im fertigen Schwingkreis lässt sich näherungsweise darstellen als

$$I_D(U_1, U_3) = \Upsilon(w)$$

$$w = \alpha_1 U_1 + \alpha_3 U_3 - w_0 .$$

Es folgt die Bewegungsgleichung

$$\dot{U}_3 = \beta I_D(U_1, U_3) - \gamma U_3 .$$

Die Konstanten w_0 , α_1 , α_3 , β und γ (alle größer Null) fassen die Werte der relevanten Bauteile im Netzwerk zusammen. Ein Ansatz wie bei einer Stabilitätsanalyse liefert die Dissipation

$$\frac{\partial}{\partial U_3} \dot{U}_3 = \begin{cases} -\gamma & , \alpha_1 U_1 + \alpha_3 U_3 \leq w_0 \\ \beta \alpha_3 - \gamma & , \alpha_1 U_1 + \alpha_3 U_3 > w_0 . \end{cases}$$

Der Parameter α_3 lässt sich also derart einstellen, dass für einen bestimmten Bereich des Phasenraums die Dissipation reduziert wird, die sonst durch $-\gamma$ gegeben ist. Im Pecora-Schwingkreis ist $\alpha_3 = 0$, was zu den genannten Einschränkungen führt.

A.2 C-Matrizen periodischer Orbits

Die in Kap. 4 vorgestellten Konzepte lassen sich auch auf die Floquet-Vektoren periodischer Orbits anwenden. Sie stellen Spezialfälle von Lyapunov-Vektoren dar. Zur numerischen Berechnung der C-Matrizen müssen zunächst die periodischen Orbits $\xi(t)$ bestimmt werden, da diese den Antrieb des linearen Tangentialsystems bilden. Dazu verwende ich die Technik der zeitverzögerten Rückkopplungskontrolle und stabilisiere durch

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{u}) + \mathbf{K}_0(\mathbf{u}_{\tau_0} - \mathbf{u})$$

exemplarisch einen Periode-1 und einen Periode-3 Orbit. Dabei muss jeweils $\tau_0 = T_p$ und die Kopplung \mathbf{K}_0 passend gewählt sein. Mit dem Systemparameter a lässt sich zusätzlich das System so einstellen, dass nach Gl. (3.13) eine Stabilisierung möglich ist. Das komplizierte Verfahren ist deshalb nötig, weil bei der Wahl eines ohne Kontrolle stabilen Orbits die Nullmode die instabilste ist. Dann ergibt sich ein vergleichsweise triviales Bild wie in Abb. 4.4b. Deshalb integriere ich das lineare System

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{Df}(\xi(t)) \mathbf{v}$$

mit den beiden ohne Kontrolle instabilen Orbits und erhalte deren instabilste Floquet-Vektoren. Matrixelemente der dazugehörigen C-Matrizen sind in Abb. A.4 in Form von Funktionen $\chi(\tau)$ dargestellt. Diese zeigen im Gegensatz zu den entsprechenden Funktionen für Chaos keinen Korrelationszerfall. Aufgrund der systemspezifischen Torsionseigenschaft der Orbits haben alle Kurven die Eigenschaft

$$\chi(\tau + T_p) = -\chi(\tau).$$

Das folgt aus der Eigenschaft (3.5) der Floquet-Vektoren, weil für diese Orbits $\Im(\lambda_0) = \pi/T_p$ ist, sodass nach einer Periodendauer eine π -Torsion erreicht ist.

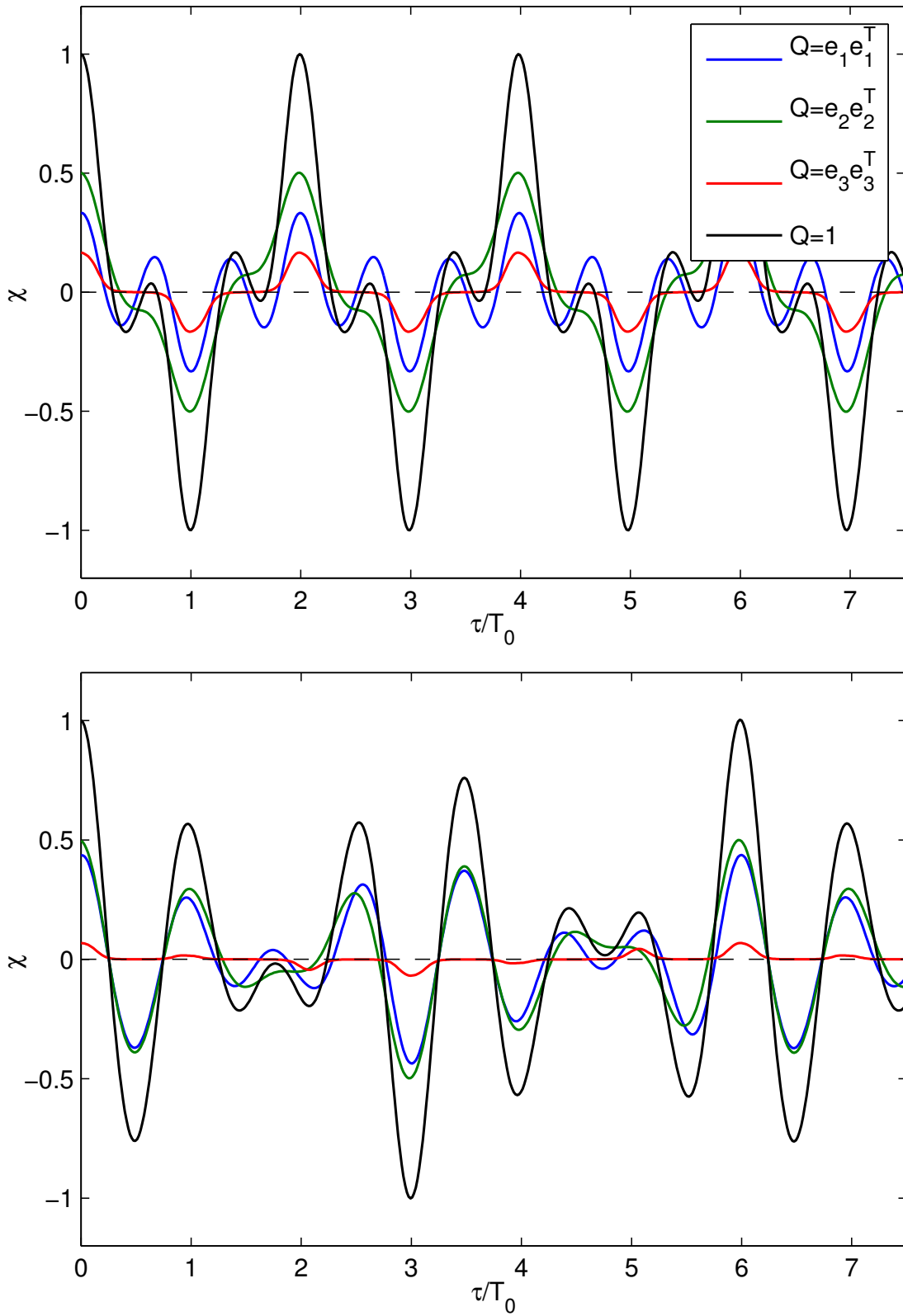


Abbildung A.4: χ -Funktionen für die führenden Floquet-Vektoren a) des instabilen Periode-1 Orbits und b) des instabilen Periode-3 Orbits.

B Analytik

B.1 Nicht-identische Systeme

Ein Spezialfall zweier nicht-identischer Systeme ist die Situation, dass sie auf unterschiedlichen Zeitskalen arbeiten, während ihr Fluss ansonsten identisch ist. Das lässt sich symmetrisch darstellen als

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= (1 - \epsilon)\mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \dot{\mathbf{y}} &= (1 + \epsilon)\mathbf{f}(\mathbf{y}).\end{aligned}\tag{B.1}$$

Diese beiden Systeme können diagonal, also durch $\mathbf{K} = k\mathbf{1}$, gekoppelt werden

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= (1 - \epsilon)\mathbf{f}(\mathbf{x}) + k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \\ \dot{\mathbf{y}} &= (1 + \epsilon)\mathbf{f}(\mathbf{y}) + k(\mathbf{x} - \mathbf{y}).\end{aligned}\tag{B.2}$$

In longitudinalen und transversalen Koordinaten schreiben sich diese Gleichungen als

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{f}(\mathbf{u}) \\ \dot{\mathbf{v}} &= \epsilon\mathbf{f}(\mathbf{u}) + (\mathbf{D}\mathbf{f}(\mathbf{u}) - 2\mathbf{K}) \cdot \mathbf{v}.\end{aligned}\tag{B.3}$$

Dabei wurde vorausgesetzt, dass die Kopplung stark genug ist, um die transversale Koordinate zu stabilisieren. Eine hinreichend große Kopplungsstärke k hat aber auch zur Folge, dass in der transversalen Gleichung einerseits $\mathbf{D}\mathbf{f}(\mathbf{u}) - 2\mathbf{K} \approx -2\mathbf{K}$. Andererseits rechtfertigt die große Dämpfung die adiabatische Näherung $\dot{\mathbf{v}} = 0$. Damit folgt

$$\mathbf{v} = \frac{\epsilon}{2k}\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \underbrace{\frac{\epsilon}{2k}}_{2\tau} \dot{\mathbf{u}}\tag{B.4}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}(t + \tau) = \mathbf{u}(t) = \mathbf{y}(t - \tau)\tag{B.5}$$

Der Fluss wird also automatisch linear extrapoliert dadurch, dass sich die Differenz der Systemtrajektorien nach der Geschwindigkeit im Vektorfeld ausrichtet. Ist $\epsilon > 0$, so dass das System \mathbf{y} das ‘schnellere’ ist, eilt \mathbf{y} seinem langsameren Gegenüber voraus, während beide gemeinsam dem Fluss mit einer mittleren Geschwindigkeit folgen. Der Effekt wird als *verzögerte Synchronisation* bezeichnet und wurde zuerst von Rosenblum an zwei Rösslersystemen nachgewiesen [17]. Das Erstaunliche an diesem Phänomen ist, dass für die verzögerte Synchronisation nicht alle der oben genannten Bedingungen streng erfüllt sein müssen. Bei Rössler-ähnlichen Systemen reicht bereits eine Verstimmung der Spiralfrequenz und eine Kopplung in einer der beiden ersten Komponenten. Diese Konfiguration verwendete Rosenblum zunächst [17]. Die obige Rechnung kann als eine Verallgemeinerung der dort vorgestellten Konzepte verstanden werden.

Beispiel Phasenoszillatoren

Das Phänomen der verzögerten Synchronisation lässt sich quantitativ auch am Beispiel zweier einfacher Oszillatoren zeigen. Der Zustandsvektor jedes Oszillators werde in einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ zusammengefasst. Als ideale Phasenoszillatoren sollen beide Systeme den Zwangsbedingungen $|z_1| = |z_2| = r_0$ unterliegen. Dies wird durch die Funktion $s(|z|, t)$ garantiert, die man analog zum klassischen Formalismus verstehen kann wie $\lambda \nabla f(z)$ mit der Zwangsbedingung $f(z) = |z| - r_0 = 0$. Für zwei ungekoppelte Oszillatoren lauten die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= (s_1(|z_1|, t) + i\omega_1) z_1 = f_1(z_1) \\ \dot{z}_2 &= (s_2(|z_2|, t) + i\omega_2) z_2 = f_2(z_2).\end{aligned}\tag{B.6}$$

Eine lineare Kopplung mit $k \in \mathbb{R}$ beschreibt im einfachsten Fall die Wechselwirkung der Systeme

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= f_1(z_1) + k(z_2 - z_1) \\ \dot{z}_2 &= f_2(z_2) + k(z_1 - z_2) .\end{aligned}\tag{B.7}$$

Eine Transformation in Polarkoordinaten durch $z = r \exp(i\varphi)$ ergibt $r_1 = r_2 = r_0$ und

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_1 &= \omega_1 + ik \left(1 - e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)}\right) \\ \dot{\varphi}_2 &= \omega_2 + ik \left(1 - e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}\right) .\end{aligned}\tag{B.8}$$

Schreibt man die Phasendifferenz als $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, so erhält man mit der Frequenzverstimmung $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ die klassische Gleichung für gekoppelte Phasenoszillatoren

$$\dot{\Delta\varphi} = \Delta\omega - 2k \sin \Delta\varphi .\tag{B.9}$$

Für $k > k_c = \Delta\omega/2$ synchronisieren die Oszillatoren. Es gibt für $\Delta\varphi$ jeweils eine stabile und eine instabile Gleichgewichtslage, die durch

$$\sin \Delta\varphi = \frac{\Delta\omega}{2k}\tag{B.10}$$

bestimmt sind. Für große k ist die stabile Lage $\Delta\varphi = \frac{\Delta\omega}{2k} \approx 0$, d.h., durch die starke Kopplung wird die Phasendifferenz unterdrückt. Es ist in dem Zusammenhang erwähnenswert, dass auch für $k < -k_c$ Synchronisation möglich ist. Für $k \rightarrow -\infty$ geht $\Delta\varphi \rightarrow \pi$, d.h. die gegenphasige Schwingung ist stabil.

B.2 Grenzen der Stabilität

Die ‘Reinform’ eines Stabilitätsproblems mit zeitverzögerter Rückkopplung ist durch die komplexe Gleichung

$$\dot{z} = \lambda_0 z - \kappa z_\tau$$

mit $z, \lambda_0, \kappa \in \mathbb{C}$ und $\tau \in \mathbb{R}$ gegeben. Die Eigenwerte dieses Systems lassen sich in der Form

$$\lambda = \lambda_0 - \kappa e^{-\lambda\tau}$$

schreiben. Mit der Lambert-W-Funktion [86] lässt sich der Exponent λ explizit darstellen als

$$\lambda = \lambda_0 + \tau^{-1} W \left(-\kappa \tau e^{-\lambda_0 \tau} \right) .\tag{B.11}$$

Entscheidend für die Stabilität ist $\Re(\lambda)$. Der Hauptwert der Lambert-W-Funktion hat die Eigenschaft

$$W \left(-e^{-1} \right) = -1 .\tag{B.12}$$

Das ist das Minimum des Realteils der Funktion. Sei die optimale Kopplung durch $\kappa = \kappa_0$ gegeben mit

$$\kappa_0 = \tau^{-1} \exp(\lambda_0 \tau - 1) ,$$

so dass das Argument der Lambert-W-Funktion in Gl. (B.11) den Wert $-e^{-1}$ annimmt. Dann ist für ein beliebiges κ

$$\Re(\lambda(\kappa_0)) \leq \Re(\lambda(\kappa)) ,$$

d.h., durch κ_0 ist der stabilste Punkt gegeben. Stabilität ist demnach nur möglich, wenn $\Re(\lambda(\kappa_0)) \leq 0$. Damit folgt aus Gl. (B.11) und (B.12) direkt Gl. (3.15)

$$\Re(\lambda_0)\tau \leq 1 .$$

B.3 Erweiterung des stochastischen Modells

B.3.1 Dynamik der Umschaltvorgänge

Allgemeine Aussagen wie für die beiden Grenzfälle sind nicht möglich, wenn die Verweildauern $\langle\theta_+\rangle$ und $\langle\theta_-\rangle$ in derselben Größenordnung wie τ liegen, weil dann die spezielle Form der Verteilungen h_+ und h_- mit in den Exponenten Λ einfließt. Man kann aber den Relaxationsprozess abschätzen, der nach jedem Vorzeichenwechsel von $s(t)$ auftritt, falls die Verweildauern nicht kürzer als die Relaxationszeiten sind. Sei unmittelbar vor einem Vorzeichenwechsel das lineare Tangentialsystem auf die instabilste Mode nach Gln. (4.26) relaxiert. Dann sind unmittelbar nach einem Vorzeichenwechsel die lokalen Zuwachsraten

$$\begin{aligned}\lambda_{-,+} &= \lambda_0 - k e^{-\lambda_- \tau} \\ \lambda_{+,-} &= \lambda_0 + k e^{-\lambda_+ \tau} .\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $\lambda_{-,+}$ den Exponenten nach einen Vorzeichenwechsel in $s(t)$ von -1 nach $+1$ bzw. umgekehrt. Da das Vorzeichen von $s(t)$ dann nach Voraussetzung lange genug seinen Wert beibehält, relaxieren die Exponenten von $\lambda_{-,+}$ nach λ_+ und von $\lambda_{+,-}$ nach λ_- . Wie schnell das geschieht, kann näherungsweise mithilfe der nächststabileren Mode der Gln. (4.26) oder einfach mit der Zeit τ abgeschätzt werden. Seien λ_{2+} und λ_{2-} die Exponenten dieser sekundären Moden, die die Gln. (4.26) erfüllen. Dann kann man unter der Annahme exponentieller Relaxation mit den Zeiten

$$\begin{aligned}T_{2+} &= |\Re(\lambda_{2+} - \lambda_+)|^{-1} \\ T_{2-} &= |\Re(\lambda_{2-} - \lambda_-)|^{-1}\end{aligned}$$

näherungsweise schreiben

$$\Lambda \approx p \left(\lambda_+ + (\lambda_{-,+} - \lambda_+) \frac{T_{2+}}{\langle\theta_+\rangle} \right) + q \left(\lambda_- + (\lambda_{+,-} - \lambda_-) \frac{T_{2-}}{\langle\theta_-\rangle} \right) .$$

Für $\langle\theta_+\rangle \rightarrow \infty$ und $\langle\theta_-\rangle \rightarrow \infty$ erhält man daraus das Ergebnis des Grenzfalls kurzer Verzögerungszeiten.

B.3.2 Phasenverschiebungen

Liegt eine andere Kopplung als die ideale PDK-Kopplung vor, wirkt diese nicht nur auf die Länge, sondern auch auf die Richtung des Abstandsvektors. Damit werden die oben gemachten Voraussetzungen teilweise aufgehoben, und es kann auch Durchmischungen zwischen den ursprünglichen Moden des Systems geben, so dass sich die Dynamik jeder theoretischen Beschreibung entzieht. Im Folgenden stelle ich daher ein heuristisches Verfahren vor, das gute Ergebnisse liefert. Dieses geht davon aus, dass es zu jeder C-Matrix \mathbf{C}_τ eine optimale Kopplung $\mathbf{K} = k\mathbf{Q}_0$ gibt, so dass deren Wirkung

$$\chi_0 = \text{Sp}(\mathbf{Q}_0 \mathbf{C}_\tau) = \max_{\mathbf{Q}} \underbrace{(\text{Sp}(\mathbf{Q} \mathbf{C}_\tau))}_{\chi}$$

den Maximalwert erreicht. Dabei sollen \mathbf{Q}_0 und alle \mathbf{Q} unitär sein. Die ideale Matrix \mathbf{Q}_0 erhält man aus der Singulärwertzerlegung von \mathbf{C}_τ , die hierbei eine hilfreiche Form der Diagonalisierung liefert

$$\mathbf{C}_\tau = \mathbf{M} \mathbf{S}_\tau \mathbf{N}^\top .$$

Mit der zyklischen Vertauschbarkeit unter Spurbildung kann man schreiben

$$\text{Sp}(\mathbf{N} \mathbf{M}^\top \mathbf{C}_\tau) = \text{Sp}(\mathbf{S}_\tau) .$$

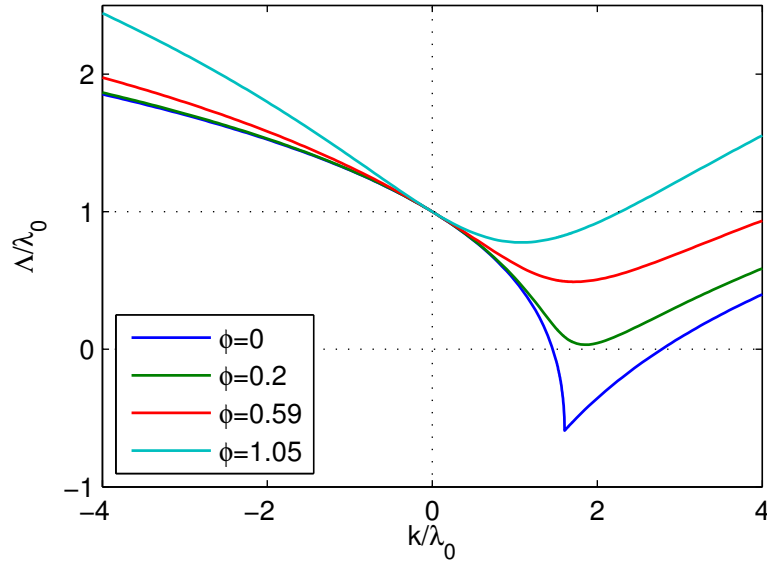


Abbildung B.1: $\Lambda(k)$ für $\chi = 0.5$, $\tau = \pi$ und unterschiedliche Werte des Phasenwinkels ϕ .

Aus der von-Neumann-Ungleichung für Singulärwerte folgt für jede der Matrizen \mathbf{Q} , dass

$$\text{Sp}(\mathbf{Q}\mathbf{C}_\tau) \leq \text{Sp}(\mathbf{S}_\tau) .$$

Die Gleichheit ist erfüllt für $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0$ mit

$$\mathbf{Q}_0 = \mathbf{N}\mathbf{M}^\top .$$

Die wesentliche Annahme meines Verfahrens besteht darin, dass der Quotient $\chi/\chi_0 \leq 1$ wie das Resultat einer gewöhnlichen Phasendrehung um einen Winkel

$$\phi = \arccos\left(\frac{\chi}{\chi_0}\right)$$

zu behandeln ist. Diese Beziehung kommt aus der Analogie zum Fall der ungestörten Spirale, für die in Gl. (4.20) $s(t) \equiv +1$ ist. Für diesen Fall lässt sich zeigen, dass $\chi_0 = 1$ und $\chi = \cos(\omega_0\tau)$ bei diagonalen Kopplung. Der Phasenwinkel ϕ ist damit wie das Argument $\omega_0\tau$ zu verstehen. Verwendet man diese Annahme, dann kann die Approximation (4.28) für den Lyapunovexponenten erweitert werden

$$\Lambda \approx \lambda_0 + \Re \left\{ \frac{\chi_0}{\tau} W\left(-k\tau e^{-\lambda_0\tau + i\phi}\right) \right\} .$$

Das Verhalten für kleine k nach Gl. (4.27) wird von diesem Ansatz wiedergegeben, wie auch Abb. B.1 bestätigt. Es bleibt die Frage, inwieweit die Voraussetzungen, die zu dem Ansatz geführt haben, tatsächlich gegeben sind. Ein Gegenbeispiel für zweidimensionale Systeme ist durch $\mathbf{C}_\tau = \frac{1}{2}\mathbf{1}$ und $\mathbf{Q} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^\top - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^\top$ gegeben. Es folgt $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{1}$ und damit $\chi_0 = 1$. Obwohl \mathbf{Q} keine Drehmatrix ist, ist $\chi = 0$. Die Abschätzung mit der heuristischen Formel ist also eine von mehreren Möglichkeiten, mit denen man schließlich eine Wahrscheinlichkeitsaussage darüber finden kann, ob vollständige Synchronisation unter speziellen Bedingungen möglich ist oder nicht.

Literaturverzeichnis

- [1] S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez, and D.-U. Hwang. Complex networks: Structure and dynamics. *Physics Reports*, 424(4-5):175 – 308, 2006.
- [2] J. F. Donges, Y. Zou, N. Marwan, and J. Kurths. Complex networks in climate dynamics. *The European Physical Journal - Special Topics*, 174:157–179, 2009. 10.1140/epjst/e2009-01098-2.
- [3] Grigory V. Osipov, Arkady S. Pikovsky, Michael G. Rosenblum, and Jürgen Kurths. Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical rössler oscillators. *Phys. Rev. E*, 55(3):2353–2361, Mar 1997.
- [4] Johannes Kestler, Wolfgang Kinzel, and Ido Kanter. Sublattice synchronization of chaotic networks with delayed couplings. *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)*, 76(3):035202, 2007.
- [5] W. Kinzel, A. Englert, G. Reents, M. Zigzag, and I. Kanter. Synchronization of networks of chaotic units with time-delayed couplings. *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)*, 79(5):056207, 2009.
- [6] Yoshiki Kuramoto. Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators. In Huzihiro Araki, editor, *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics*, volume 39 of *Lecture Notes in Physics*, pages 420–422. Springer Berlin / Heidelberg, 1975. 10.1007/BFb0013365.
- [7] Arkady Pikovsky, Michael Rosenblum, and Jürgen Kurths. *Synchronization - A universal concept in nonlinear sciences*. Cambridge University Press, 2001.
- [8] Hirokazu Fujisaka and Tomoji Yamada. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. *Progress of Theoretical Physics*, 69(1):32–47, 1983.
- [9] V. S. Afraimovich, N. N. Verichev, and M. I. Rabinovich. Stochastic synchronization of oscillation in dissipative systems. *Radiophysics and Quantum Electronics*, 29(9):795–803, Sep 1986.
- [10] Louis M. Pecora and Thomas L. Carroll. Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, 64(8):821–824, Feb 1990.
- [11] S. Boccaletti, J. Kurths, G. Osipov, D. L. Valladares, and C. S. Zhou. The synchronization of chaotic systems. *Physics Reports*, 366(1-2):1 – 101, 2002.
- [12] Michael G. Rosenblum, Arkady S. Pikovsky, and Jürgen Kurths. Phase synchronization of chaotic oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 76(11):1804–1807, Mar 1996.
- [13] Epaminondas Rosa, Edward Ott, and Mark H. Hess. Transition to phase synchronization of chaos. *Phys. Rev. Lett.*, 80(8):1642–1645, Feb 1998.
- [14] Michael A. Zaks, Eun-Hyoung Park, Michael G. Rosenblum, and Jürgen Kurths. Alternating locking ratios in imperfect phase synchronization. *Phys. Rev. Lett.*, 82(21):4228–4231, May 1999.
- [15] Nikolai F. Rulkov, Mikhail M. Sushchik, Lev S. Tsimring, and Henry D. I. Abarbanel. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems. *Phys. Rev. E*, 51(2):980–994, Feb 1995.

-
-
- [16] L. Kocarev and U. Parlitz. Generalized synchronization, predictability, and equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems. *Phys. Rev. Lett.*, 76(11):1816–1819, Mar 1996.
- [17] Michael G. Rosenblum, Arkady S. Pikovsky, and Jürgen Kurths. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 78(22):4193–4196, Jun 1997.
- [18] Ricardo Femat and Gualberto Solís-Perales. On the chaos synchronization phenomena. *Physics Letters A*, 262(1):50 – 60, 1999.
- [19] S. Boccaletti, D. L. Valladares, J. Kurths, D. Maza, and H. Mancini. Synchronization of chaotic structurally nonequivalent systems. *Phys. Rev. E*, 61(4):3712–3715, Apr 2000.
- [20] Daniel J. Gauthier and Joshua C. Bienfang. Intermittent loss of synchronization in coupled chaotic oscillators: Toward a new criterion for high-quality synchronization. *Phys. Rev. Lett.*, 77(9):1751–1754, Aug 1996.
- [21] Hirokazu Fujisaka and Tomoji Yamada. A new intermittency in coupled dynamical systems. *Progress of Theoretical Physics*, 74(4):918–921, 1985.
- [22] Tomoji Yamada, Kazuhiro Fukushima, and Taichi Yazaki. A new type of intermittency in an electronic circuit. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 99:120–130, 1989.
- [23] Alexander Janz. Experimentelle Untersuchung der On-Off-Intermittenz an der Schwelle zur vollständigen Synchronisation zweier chaotischer Rösslerschwingkreise. Bachelor thesis, TU Darmstadt, 2009.
- [24] K. Pyragas. Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Physics Letters A*, 170(6):421 – 428, 1992.
- [25] K. Pyragas and A. Tamasevicius. Experimental control of chaos by delayed self-controlling feedback. *Physics Letters A*, 180(1-2):99 – 102, 1993.
- [26] A. Kittel, K. Pyragas, and R. Richter. Prerecorded history of a system as an experimental tool to control chaos. *Phys. Rev. E*, 50(1):262–268, Jul 1994.
- [27] Edward Ott, Celso Grebogi, and James A. Yorke. Controlling chaos. *Phys. Rev. Lett.*, 64(11):1196–1199, Mar 1990.
- [28] Scott Hayes, Celso Grebogi, and Edward Ott. Communicating with chaos. *Phys. Rev. Lett.*, 70(20):3031–3034, May 1993.
- [29] Scott Hayes, Celso Grebogi, Edward Ott, and Andrea Mark. Experimental control of chaos for communication. *Phys. Rev. Lett.*, 73(13):1781–1784, Sep 1994.
- [30] Matthew B. Kennel and Shawn D. Pethel. Complete and flexible replacement of chaotic uncertainty with transmitted information. *Phys. Rev. E*, 72(4):046212, Oct 2005.
- [31] Shawn D. Pethel, Ned J. Corron, Quitisha R. Underwood, and Krishna Myneni. Information flow in chaos synchronization: Fundamental tradeoffs in precision, delay, and anticipation. *Phys. Rev. Lett.*, 90(25):254101, Jun 2003.
- [32] Wolfram Just, Thomas Bernard, Matthias Ostheimer, Ekkehard Reibold, and Hartmut Benner. Mechanism of time-delayed feedback control. *Phys. Rev. Lett.*, 78(2):203–206, Jan 1997.
- [33] Hiroyuki Nakajima. On analytical properties of delayed feedback control of chaos. *Physics Letters A*, 232(3-4):207 – 210, 1997.

-
- [34] Hiroyuki Nakajima and Yoshisuke Ueda. Half-period delayed feedback control for dynamical systems with symmetries. *Phys. Rev. E*, 58(2):1757–1763, Aug 1998.
- [35] B. Fiedler, V. Flunkert, M. Georgi, P. Hövel, and E. Schöll. Refuting the odd-number limitation of time-delayed feedback control. *Physical Review Letters*, 98(11):114101, 2007.
- [36] Clemens von Loewenich. *Zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle torsionsfreier periodischer Orbits*. Dissertation, TU Darmstadt, 2010.
- [37] K. Pyragas. Control of chaos via an unstable delayed feedback controller. *Phys. Rev. Lett.*, 86(11):2265–2268, Mar 2001.
- [38] Klaus Höhne, Hiroyuki Shirahama, Chol-Ung Choe, Hartmut Benner, Kestutis Pyragas, and Wolfram Just. Global properties in an experimental realization of time-delayed feedback control with an unstable control loop. *Physical Review Letters*, 98(21):214102, 2007.
- [39] Joshua E. S. Socolar, David W. Sukow, and Daniel J. Gauthier. Stabilizing unstable periodic orbits in fast dynamical systems. *Phys. Rev. E*, 50(4):3245–3248, Oct 1994.
- [40] K. Pyragas. Control of chaos via extended delay feedback. *Physics Letters A*, 206(5-6):323 – 330, 1995.
- [41] Wolfram Just, Svitlana Popovich, Andreas Amann, Nilüfer Baba, and Eckehard Schöll. Improvement of time-delayed feedback control by periodic modulation: Analytical theory of floquet mode control scheme. *Phys. Rev. E*, 67(2):026222, Feb 2003.
- [42] Andreas Fichtner, Wolfram Just, and Gunter Radons. Analytical investigation of modulated time-delayed feedback control. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 37(10):3385–3391, 2004.
- [43] Wolfram Just, Ekkehard Reibold, Krzysztof Kacperski, Piotr Fronczak, Janusz A. Hołyst, and Hartmut Benner. Influence of stable floquet exponents on time-delayed feedback control. *Phys. Rev. E*, 61(5):5045–5056, May 2000.
- [44] Wolfram Just, Dirk Reckwerth, Ekkehard Reibold, and Hartmut Benner. Influence of control loop latency on time-delayed feedback control. *Phys. Rev. E*, 59(3):2826–2829, Mar 1999.
- [45] Nilüfer Baba, Andreas Amann, Eckehard Schöll, and Wolfram Just. Giant improvement of time-delayed feedback control by spatio-temporal filtering. *Phys. Rev. Lett.*, 89(7):074101, Jul 2002.
- [46] L. Kocarev, K. S. Halle, K. Eckert, Chua L. O., and U. Parlitz. Experimental demonstration of secure communications via chaotic synchronization. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2:709–713, 1992.
- [47] Kevin M. Cuomo and Alan V. Oppenheim. Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications. *Phys. Rev. Lett.*, 71(1):65–68, Jul 1993.
- [48] Ido Kanter, Evi Kopelowitz, and Wolfgang Kinzel. Public channel cryptography: Chaos synchronization and hilbert’s tenth problem. *Phys. Rev. Lett.*, 101(8):084102, Aug 2008.
- [49] I. Kanter, E. Kopelowitz, J. Kestler, and W. Kinzel. Chaos synchronization with dynamic filters: Two-way is better than one-way. *EPL (Europhysics Letters)*, 83(5):50005, 2008.
- [50] W. Kinzel, A. Englert, and I. Kanter. On chaos synchronization and secure communication. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 368(1911):379–389, 2010.

-
-
- [51] Tilmann Heil, Ingo Fischer, Wolfgang Elsässer, Josep Mulet, and Claudio R. Mirasso. Chaos synchronization and spontaneous symmetry-breaking in symmetrically delay-coupled semiconductor lasers. *Phys. Rev. Lett.*, 86(5):795–798, Jan 2001.
- [52] H.-J. Wünsche, S. Bauer, J. Kreissl, O. Ushakov, N. Korneyev, F. Henneberger, E. Wille, H. Erzgräber, M. Peil, W. Elsässer, and I. Fischer. Synchronization of delay-coupled oscillators: A study of semiconductor lasers. *Phys. Rev. Lett.*, 94(16):163901, Apr 2005.
- [53] Einat Klein, Noam Gross, Michael Rosenbluh, Wolfgang Kinzel, Lev Khaykovich, and Ido Kanter. Stable isochronal synchronization of mutually coupled chaotic lasers. *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)*, 73(6):066214, 2006.
- [54] Alexandra S. Landsman and Ira B. Schwartz. Complete chaotic synchronization in mutually coupled time-delay systems. *Phys. Rev. E*, 75(2):026201, Feb 2007.
- [55] Ingo Fischer, Raúl Vicente, Javier M. Buldú, Michael Peil, Claudio R. Mirasso, M. C. Torrent, and Jordi García-Ojalvo. Zero-lag long-range synchronization via dynamical relaying. *Phys. Rev. Lett.*, 97(12):123902, Sep 2006.
- [56] M. Zigzag, M. Butkovski, A. Englert, W. Kinzel, and I. Kanter. Zero-lag synchronization of chaotic units with time-delayed couplings. *EPL (Europhysics Letters)*, 85(6):60005 (6pp), 2009.
- [57] J. K. White, M. Matus, and J. V. Moloney. Achronal generalized synchronization in mutually coupled semiconductor lasers. *Phys. Rev. E*, 65(3):036229, Mar 2002.
- [58] Serhiy Yanchuk, Klaus R. Schneider, and Lutz Recke. Dynamics of two mutually coupled semiconductor lasers: Instantaneous coupling limit. *Phys. Rev. E*, 69(5):056221, May 2004.
- [59] A. Englert, W. Kinzel, Y. Aviad, M. Butkovski, I. Reidler, M. Zigzag, I. Kanter, and M. Rosenbluh. Zero lag synchronization of chaotic systems with time delayed couplings. *Phys. Rev. Lett.*, 104(11):114102, Mar 2010.
- [60] Meital Zigzag, Maria Butkovski, Anja Englert, Wolfgang Kinzel, and Ido Kanter. Zero-lag synchronization and multiple time delays in two coupled chaotic systems. *Phys. Rev. E*, 81(3):036215, Mar 2010.
- [61] Ido Kanter, Noam Gross, Einat Klein, Evi Kopelowitz, Pinhas Yuskovits, Lev Khaykovich, Wolfgang Kinzel, and Michael Rosenbluh. Synchronization of mutually coupled chaotic lasers in the presence of a shutter. *Phys. Rev. Lett.*, 98(15):154101, Apr 2007.
- [62] Jacques L. Willems. *Stabilität dynamischer Systeme*. Oldenbourg, 1973.
- [63] Louis M. Pecora, Thomas L. Carroll, Gregg A. Johnson, Douglas J. Mar, and James F. Heagy. Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts, and applications. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 7(4):520–543, 1997.
- [64] Louis M. Pecora and Thomas L. Carroll. Master stability functions for synchronized coupled systems. *Phys. Rev. Lett.*, 80(10):2109–2112, Mar 1998.
- [65] Henning U. Voss. Anticipating chaotic synchronization. *Phys. Rev. E*, 61(5):5115–5119, May 2000.
- [66] M. Ciszak, J. M. Gutiérrez, A. S. Cofío, C. Mirasso, R. Toral, L. Pesquera, and S. Ortín. Approach to predictability via anticipated synchronization. *Phys. Rev. E*, 72(4):046218, Oct 2005.
- [67] D. V. Senthilkumar, J. Kurths, and M. Lakshmanan. Stability of synchronization in coupled time-delay systems using krasovskii-lyapunov theory. *Phys. Rev. E*, 79(6):066208, Jun 2009.

-
- [68] Wolfram Just, Holger Kantz, Christian Rodenbeck, and Mario Helm. Stochastic modelling: replacing fast degrees of freedom by noise. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 34(15):3199–3213, 2001.
- [69] Thomas C. Stemler. *Experimentelle Untersuchungen zur rauschfreien stochastischen Resonanz am Beispiel einer Attraktor-Verschmelzkrise*. Dissertation, TU Darmstadt, 2006.
- [70] Thomas Stemler, Johannes P. Werner, Hartmut Benner, and Wolfram Just. Stochastic modeling of experimental chaotic time series. *Physical Review Letters*, 98(4):044102, 2007.
- [71] Thomas Jüngling. Rauschfreie Stochastische Resonanz an inneren Krisen. Diplomarbeit, TU Darmstadt, 2006.
- [72] Tomoji Yamada, Takehiko Horita, Katsuya Ouchi, and Hirokazu Fujisaka. Stochastic model of chaotic phase synchronization. i. *Progress of Theoretical Physics*, 116(5):819–837, 2006.
- [73] Thomas Jüngling, Hartmut Benner, Thomas Stemler, and Wolfram Just. Noise-free stochastic resonance at an interior crisis. *Phys. Rev. E*, 77(3):036216, Mar 2008.
- [74] Thomas L. Carroll and Louis M. Pecora. *Nonlinear Dynamics In Circuits*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1995.
- [75] O. E. Rössler. An equation for continuous chaos. *Physics Letters A*, 57(5):397 – 398, 1976.
- [76] A. G. Balanov, N. B. Janson, and E. Schöll. Delayed feedback control of chaos: Bifurcation analysis. *Phys. Rev. E*, 71(1):016222, Jan 2005.
- [77] Thomas Jüngling, Hartmut Benner, Hiroyuki Shirahama, and Kazuhiro Fukushima. Complete synchronisation of two mutually delay coupled chaotic oscillators. unpublished.
- [78] Wolfram Just, Ekkehard Reibold, Hartmut Benner, Krzysztof Kacperski, Piotr Fronczak, and Janusz Holyst. Limits of time-delayed feedback control. *Physics Letters A*, 254(3-4):158 – 164, 1999.
- [79] Angela Schartel. Experimentelle Untersuchung von Synchronisationsphänomenen an chaotischen Systemen mit zeitverzögerten Komponenten. Bachelor thesis, TU Darmstadt, 2009.
- [80] Henning U. Voss. Dynamic long-term anticipation of chaotic states. *Phys. Rev. Lett.*, 87(1):014102, Jun 2001.
- [81] C. Mendoza, S. Boccaletti, and A. Politi. Convective instabilities of synchronization manifolds in spatially extended systems. *Phys. Rev. E*, 69(4):047202, Apr 2004.
- [82] Kestutis Pyragas and Tatjana Pyragienė. Coupling design for a long-term anticipating synchronization of chaos. *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)*, 78(4):046217, 2008.
- [83] Kestutis Pyragas and Tatjana Pyragienė. Extending anticipation horizon of chaos synchronization schemes with time-delay coupling. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 368(1911):305–317, 2010.
- [84] Gábor Stépán and Tamás Insperger. Stability of time-periodic and delayed systems – a route to act-and-wait control. *Annual Reviews in Control*, 30(2):159 – 168, 2006.
- [85] Ulrich Tietze and Christoph Schenk. *Halbleiter-Schaltungstechnik*. Springer, 2010. 13.Auflage.
- [86] R. M. Corless, G. H. Gonnet, D. E. G. Hare, D. J. Jerrey, and D. E. Knuth. On the lambert w function. In *Advances in Computational Mathematics*, pages 329–359, 1996.
-



Lebenslauf

Angaben zur Person

Dipl.-Phys. Thomas Jüngling
Geburtsdatum 15. Dezember 1981
Familienstand ledig

Schulbildung

08/1988–06/1992 Grundschule in Ortenberg (Hessen)
08/1992–05/2001 Wolfgang-Ernst-Gymnasium in Büdingen (Hessen),
Abschluss: Abitur mit Note 1,2

Zivildienst

06/2001–03/2002 Technischer Dienst im Mathilden-Hospital Büdingen

Akademischer Bildungsweg

04/2002–03/2007 Physikstudium an der TU Darmstadt,
Abschluss: Diplom-Physiker, Note: sehr gut.
Titel der Arbeit: „Rauschfreie Stochastische Resonanz an inneren Krisen“
04/2007–10/2010 Promotion an der TU Darmstadt, AG Prof. Dr. H. Benner. Thema: „Vollständige Synchronisation chaotischer Oszillatoren mit zeitverzögerter Kopplung“



Danksagung

Mein ganz besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Hartmut Benner dafür, dass ich in seiner Arbeitsgruppe diese Arbeit durchführen durfte. Erst seine inspirierende persönliche Art und die exzellente Betreuung haben zu den reichhaltigen Ergebnissen geführt, die ich hier dokumentiert habe. Prof. Benner hatte stets ein offenes Ohr für mich und meine Angelegenheiten und stand mir hilfreich mit Rat und Tat zur Seite.

Ebenso danke ich Prof. Dr. Wolfram Just für die wertvollen Diskussionsimpulse, die zu einer superstabilen Arbeitstrajektorie geführt haben.

Ich danke recht herzlich Prof. Dr. Hiroyuki Shirahama, dessen Besuche mich immer wieder erfreut haben und mir neue Motivation für die weitere Arbeit brachten. Meinen ehemaligen Kollegen Dr. Johannes Werner und Dr. Clemens von Loewenich danke ich für das Computer-Service-Center, die guten \LaTeX -Vorlagen und nicht zuletzt für das freundliche Arbeitsklima. Das gilt auch für die anderen Gruppenmitglieder, die während meiner Promotionszeit kamen und gingen. Besonders danke ich meinen beiden Bachelor-Studenten Alexander Janz und Angela Schartel, dass sie meine Betreuung ertragen und ihre Arbeiten ordentlich fertiggestellt haben. Ich danke auch den Kollegen dieses und anderer Institute, mit denen ich sporadisch zu tun hatte, für die interessanten Diskussionen.

Meinem Vater, der die Fertigstellung dieser Arbeit leider nicht mehr erleben durfte, danke ich dafür, dass er meine Promotion stets als etwas Besonderes gesehen hat. Er wusste meine Arbeit zu würdigen und war von meinen Fähigkeiten fester überzeugt als ich selbst. Ich bin außerdem dankbar für die herzhafte und lockere Art, die ich von ihm habe, und die zum Gelingen der Arbeit beigetragen hat.

Ich danke auch meiner Mutter, dass wir uns auch in den schwersten Zeiten verstanden haben und immer so gut zusammenhalten konnten. Ihr verdanke ich auch den nötigen Biss, um in späten Stunden noch zielstrebig weiterzuarbeiten bis alles stimmt.

Herzlichen Dank an meine liebe Freundin Angela, die mit vielfältiger nicht-invasiver Unterstützung dafür gesorgt hat, dass ich das Beste geben konnte. Dass damit sehr viel mehr als nur der Brötchen- und Schokoladenservice gemeint ist, versteht sich von selbst.

Ich danke auch allen, die mit mir am Institut musiziert haben. So gab es auch an Tagen, an denen das Experiment nicht funktioniert, die Numerik nur Fehler ausspuckt und ich in der Analytik nur Unbekannte sehe, immer noch etwas, auf das man sich zum Feierabend freuen konnte.



Erklärung zur Dissertation

Hiermit versichere ich, die vorliegende Dissertation ohne Hilfe Dritter nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln angefertigt zu haben. Alle Stellen, die aus Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Darmstadt, den 23. Dezember 2010

(T. Jüngling)